الرياضيات

الأستاذ

محمد حميد

0770 710 5007

t.me/mohhmath

2020

السادس التطبيقي

الأستاذ محمد حميد

الفصل الاول

الاعداد المركبة

الاستاذ محمد حميد

الإهداء

الى سيدي ومولاي سبط الرسول محمد (صلى اللّٰه عليه وآله) الامام الحسين (عليه السلام) أهدي هذا العمل المتواضع ... سائلاً اللّٰه (عز وجل) أن يقبله عنده ويجعل لي عنده قدم صدق مع الحسين وأصحاب الحسين الذين بذلوا مهجهم دون الحسين (ع)

الاعداد المركبة complex numbers

تعريف : يسمى العدد المكتوب بالصيغة $\mathbb{C} = a + bi$ حيث ان $a , b \in R$ عددان حقيقيان $i = \sqrt{-1}$ يسمى عددا مركبا ، حيث ان a جزءه الحقيقي Real part ويسمى b جزءه التخيلي Imaginary part ويرمز الى مجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويقال للصيغة $a + bi$ الصيغة العادية او الجبرية للعدد المركب وكذلك للعدد المركب اكثر من صيغة حيث يكتب بشكل زوج مرتب (a , b) وتسمى بالصيغة الديكارتية للعدد المركب .

مثال : (1) العدد $6 - 3i$ عدد مركب جزءه الحقيقي 6 وجزءه التخيلي (-3)

(2) العدد -8 عدد مركب جزءه الحقيقي -8 وجزءه التخيلي 0

ويسمى العدد المركب الذي يحتوي على جزء واحد كالاتي :

- العدد المركب الذي يحتوي جزء حقيقي فقط يسمى (عدد حقيقي بحت) مثل هذه الاعداد $(5 , -3 , 7)$
- العدد المركب الذي يحتوي على جزء تخيلي فقط يسمى (عدد تخيلي بحت) مثل هذه الاعداد $(2i , i, 5i)$

قوى i

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = (-1) . i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1) . (-1) = 1$

$i^5 = i^4 . i = (1)^4 . i = i$

$i^{17} = (i^2)^8 . i = (-1)^8 . i = 1 . i = i$

$i^{15} = (i^2)^7 . i = (-1)^7 . i = -1 . i = -i$

$i^{-15} = \frac{1}{i^{15}} = \frac{i^{16}}{i^{15}} = i$

$i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{i^8}{i^7} = i$

وبصورة عامة عند رفع i لعدد صحيح موجب فالناتج يكون احد عناصر المجموعة $\{-i , i , -1 , 1\}$ حيث نقسم اس (i) على 4 وباقي القسمة هو للأس الجديد لـ i .

ملاحظة : في حالة الكسورالتي تحتوي في المقام i يجب ان يكون العدد الذي نأخذه في البسط أكبر من العدد الذي في المقام ، ويجب ان يكون اسه من مضاعفات العدد (4).

مثال : أكتب ما يلي في ابسط صورة :

$i^{20} = 1$

$i^{58} = (i^4)^{14}.\ i^2 = (1)^{14} i^2 = -1$

$i^{12n+93} = (i^4)^{3n}.\ i^{93} = (1)^{3n}.\ (i^{92}.i) = (1).\ ((i^4)^{23}.i) = i$

$i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i$

ملاحظة : ان كل $i^4 = 1$ اي ان $\boldsymbol{i^8 = i^4 . i^4 = 1 \times 1 = 1 \Rightarrow i^8 = 1}$

وبصورة عامة فإن كل مضاعفات العدد 4 هو 1

ملاحظة : يمكننا كتابة الجذر لأي عدد حقيقي سالب بدلالة (i) فمثلاً :

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4i$, $\sqrt{-12} = \sqrt{12}.\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}i$

$\sqrt{-15} = \sqrt{15}.\sqrt{-1} = \sqrt{15}i$

مثال : أكتب كلاً مما يأتي بالصيغة bi

$(1)\sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$

$(2)\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}i$

مثال : أكتب الاعداد التالية على الصورة $\boldsymbol{a + bi}$

$(a)\ -1 - \sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3}.\sqrt{-1} = -1 - \sqrt{3}i$

$(b)\ \frac{1 + \sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{25}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5i}{4}$

مثال : أكتب الاعداد التالية بالصيغة الجبرية للعدد المركب :

$(1)\ i^{16} = (i^4)^4 = (1)^4 = 1 = 1 + 0i$

$(2)\ i^{15} = i^{12}.i^3 = (1).(-i) = -i = 0 - i$

$(3)\ i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i = 0 - i$

$(4)\ i^{-23} = \frac{1}{i^{23}} = \frac{i^{24}}{i^{23}} = i = 0 + i$

مثال : اكتب بالصيغة العادية للعدد المركب كل مما يأتي :

1) $i^2 - \sqrt{-36} = -1 - 6i$

2) $i + \sqrt{12} = i + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + i$

مصطلحات عامة : مجموعة الاعداد الطبيعية N ، مجموعة الاعداد الصحيحة Z ، مجموعة الاعداد الحقيقية R ، مجموعة الاعداد المركبة C ، الجزء الحقيقي للعدد المركب $R(z)$ ، الجزء التخيلي للعدد المركب $I(z)$.

واجب : ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب :

$(1)\ i^{10}$ $\quad (3)\ 22 - i^3$ $\quad (4)\ 5 - i^{16}$ $\quad (5)\ 5i^{10} + i^3$

$(2)\ i^{92}$ $\quad (6)\ 18i^8 - i^2$ $\quad (7)\ (5i^{10} + i^3).i$ $\quad (8)\ 5i^{-4} - 3i^{-6}$

تساوي عددين مركبين

اذا كان $Z_2 = a_2 + b_2 i\ ,\ Z_1 = a_1 + b_1 i$

فإن $Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2\ ,\ b_1 = b_2$

❖ اي اذا تساوى عددين مركبين فإن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي متساويان .

مثال : جد a , b اذا علمت ان $a + bi = -13 - 2i$

الحل : بإستخدام خاصية التساوي

الجزء التخيلي $b = -2$ الجزء الحقيقي $a = -13$

مثال : جد قيمة x , y الحقيقيين اللذان يحققان كل من المعادلات الاتية :

a) $2x - 3 + 5i = 7 + (3y + 3)i$

الحل : بإستخدام خاصية التساوي

$$2x - 3 = 7 \Rightarrow 2x = 10 \Longrightarrow x = 5$$

$$3y + 3 = 5 \Rightarrow 3y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{3}$$

b) $2x + 3y + 15i = 6 + (3x + 4y)i$

$$2x + 3y = 6 \ldots\ldots\ldots (1)]\ \times 3$$

$$3x + 4y = 15 \ldots\ldots\ldots (2)]\ \times 2$$

$$6x + 9y = 18 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\mp 6x \mp 8y = \mp 30 \ldots\ldots (4)$$ بالطرح

$y = -12$ نعوض في (١)

$$2x + 3(-12) = 6$$

$$2x - 36 = 6 \Rightarrow 2x = 6 + 36 \Rightarrow 2x = 42 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x = 21$$

واجب

اوجد قيمة y, x

1) $(2x - 13) + (2y + x)i = -3y + 8i$

2) $(2x^2 - 3) + (y + 2x)i = -x + 5i$

3) $x^2 - 2xyi - y^2 = 12 - 16i$

c) $(2y+1)-(2x-1)i = -8+3i$

الحل : بإستخدام خاصية التساوي

$2y+1 = -8 \Rightarrow 2y = -8-1 \Rightarrow 2y = -9$

$\therefore\ y = \frac{-9}{2}$ الجزء الحقيقي

$-(2x-1) = 3 \Rightarrow -2x+1 = 3 \Rightarrow -2x = 3-1 \Rightarrow -2x = 2 \overset{\div -2}{\Longrightarrow}$

$\therefore\ x = -1$ الجزء التخيلي

d) $x^2 - 2xyi - y^2 = 4i - 3$

$x^2 - y^2 - 2xyi = -3+4i$

$x^2 - y^2 = -3$ ……………(1)

$-2xy = 4$ ………………(2)

$y = \frac{4}{-2x} = \frac{-2}{x}$ من معادلة (٢) نحصل على y لنعوضها في معادلة (١)

$x^2 - (\frac{-2}{x})^2 = -3$

$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\ ]\ .\ x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2+4)(x^2-1) = 0$

أما $x^2+4=0$ تهمل $\boxed{x^2 = -4}$ لا يمكن حلها في R

أو $x^2-1=0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow y = \frac{-2}{1} = -2\ ,\ y = \frac{-2}{-1} = 2$

جمع وطرح الاعداد المركبة

$\forall\ C_1, C_2, C_3 \in C$ و كان , $C_1 = a+bi$, $C_2 = c+di$ فإن

1) $C_1+C_2 = C_2+C_1$

2) $C_1+(C_2+C_3) = (C_1+C_2)+C_3$

3) $C_1+C_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

4) $C = a+bi\ \exists -C = -a-bi\ ,\ C+(-C) = 0$ النظير الجمعي للعدد المركب

5) $0+C = C+0\ ,\ 0 = 0+0i$ العنصر المحايد لعملية الجمع هو الصفر

ملاحظة : اذا كان $c = a+bi$ فإن نظيره الجمعي $-c = -a-bi$

مثال : جد ناتج ما يأتي :

$1)(2+3i)+(1-5i)=(2+1)+(3-5)i=3-2i$

$2)(3-i)+(-4+6i)=(3-4)+(-1+6)i=-1+5i$

$3)(4+5i)-(2-7i)=(4+5i)+(-2+7i)=(4-2)+(5+7)i$

$=2+12i$

$4)-2i-(3i^2-4i^3)=(0-2i)-(-3+4i)=(0-2i)+(3-4i)$

$=3-6i$

مثال : حل المعادلة $x\in C\ ,\ (2-4i)+x=-5+i$

الحل : باضافة النظير الجمعي للعدد $(2-4i)$

$(2-4i)+x=-5+i$

$(2-4i)+(-2+4i)+x=(-5+i)+(-2+4i)$

$x=(-5-2)+(1+4)i$

$x=-7+5i$

ملاحظة : ان طرح اي عدد مركب من اخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للعدد المركب الاخر .

مثال : جد ناتج $(3-2i)-(8+5i)$

$(3-2i)+(-8-5i)=(3-8)+(-2-5)i=-5-7i$

ملاحظة : مجموعة الاعداد الحقيقية R هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد المركبة C اي ان $R\subset C$

مثال : جد ناتج $(7-13i)-(9+4i)$

الحل :

$=(7-13i)-(9+4i)$

$=(7-13i)+(-9-4i)=(7-9)+(-13-4)i=-2-17i$

مثال : جد مجموع العددين في كل مما يأتي :

a) $3+4\sqrt{2}\,i\ \ ,\ \ 5-2\sqrt{2}\,i$

$(3+4\sqrt{2}\,i)+(5-2\sqrt{2}\,i)=(3+5)+(4\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}\,i)=8+2\sqrt{2}\,i$

b) $3\ ,2-5i$

$(3+0i)+(2-5i)=(3+2)+(0-5i)=5-5i$

c) $m = 1 + 5i \;,\; w = 3 + 7i \;,\; z = -1 - i$

$$m + w + z = (1 + 5i) + (3 + 7i) + (-1 - i) = (1 + 3 - 1) + (5 + 7 - 1)i = 3 + 11i$$

مثال : اذا كان $c = 1 + 2i \,, w = -1 - 7i \,, z = -1 - 11i$ فأوجد ما يلي : $-2c - 4w + 3z$

$$-2c - 4w + 3z = -2(1 + 2i) - 4(-1 - 7i) + 3(-1 - 11i)$$
$$= (-2 - 4i) + (4 + 28i) + (-3 - 33i)$$
$$= (-2 + 4 - 3) + (-4 + 28 - 33)i = -1 - 9i$$

واجب : اذا كان $c = 1 + 2i \;,\; w = -1 - 7i \;,\; z = -1 - 11i$ فأوجد ما يلي :

(a) $2iw + iz + 3z$ (b) $-3c + 2z - 4i + 2$ (c) $3(z + c + w)$ (d) $2i\left(iz + 3i^3\right)$

ضرب الاعداد المركبة

اذا كان $C_1 = (a + bi) \;, C_2 = (c + di) \;\forall\; c, h \in R$ فإن

1) $h(a + bi) = ah + hbi$

2) $hi(a + bi) = hai + hbi^2 = hai - hb = -hb + hai$

3) $C_1 . C_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4) $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

5) $\forall\; c \neq 0 + 0i \;\; \exists\; c^{-1} = \frac{1}{c}$

ملاحظة : يوجد النظير الضربي لكل عدد مركب ما عدا الصفر لا يوجد له نظير ضربي .

مثال : جد ناتج كل مما يأتي بالصيغة الجبرية للعدد المركب :

1) $3(1 - 6i) = 3 - 18i$

2) $3i(1 - 6i) = 3i - 18i^2 = 3i + 18 = 18 + 3i$

3) $(1 + 2i)(2 + 3i) = (2 - 6) + (3 + 4)i = -4 + 7i$

4) $(2 - 3i)(4 - i) = (8 - 3) + (-2 - 12)i = 5 - 14i$

5) $(2i^2 + 3i^3)(\sqrt{-4} + 5) = (-2 - 3i)(2i + 5) = (-2 - 3i)(5 + 2i)$
$$= (-10 + 6) + (-4 - 15)i = -4 - 19i$$

6) $(1 - 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$

7) $(-2 + 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

8) $(1 + 2i)^3 = (1 + 2i)(1 + 2i)^2 = (1 + 2i)(1 + 4i + 4i^2)$
$$= (1 + 2i)(-3 + 4i) = (-3 - 8) + (4i - 6i) = -11 - 2i$$

9) $(2-i)^4 = [(2-i)^2]^2 = (4-4i+i^2)^2 = (3-4i)^2 = 9-24i+16i^2 = -7-24i$

10) $(1-\sqrt{3}i)^2 + (2-2\sqrt{3}i)^2 = (1-2\sqrt{3}i+3i^2)+(4-8\sqrt{3}i+12i^2)$

$= (-2-2\sqrt{3}i) + (-8-8\sqrt{3}i) = -10-10\sqrt{3}i$

11) $(1+i)^2-(3-i)(1+2i) = (1+2i+i^2)-[(3+2)+[(6-1)i]$

$= (0+2i)-(5+5i) = (0+2i)+(-5-5i) = -5-3i$

12) $(1+i)^3-(1-i)^3 = (1+i)^2(1+i)-(1-i)^2(1-i)$

$= (1+2i+i^2)(1+i)-(1-2i+i^2)(1-i) = 2i(1+i)-[-2i(1-i)]$

$= (2i+2i^2)-(-2i+2i^2) = (-2+2i)-(-2-2i) = (-2+2i)+(2+2i) = 4i$

13) اذا كانت $x = 2+3i$ ، فجد قيمة $x^2-3xi+\sqrt{-16}$

$= x^2-3xi+\sqrt{-16} = (2+3i)^2-3(2+3i)i+4i$

$= (4+12i+9i^2)+(-6i-9i^2)+(0+4i)$

$= (-5+12i)+(9-6i)+(0+4i) = 4+10i$

14) $(1+i)^2+(1-i)^2 = (1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$

$= (1+2i-1)+(1-2i-1) = 2i-2i = 0$

واجب : جد ناتج كل مما يلي :

(1) $(2+\sqrt{-3})(1+2\sqrt{-3})$ (2) $i(1+i)-i^3(1+2i)$

(3) $(3+\sqrt{-8})(2+2\sqrt{-2})$ (4) $(\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2$

مرافق العدد المركب

اذا كان $c = a+bi$ فإن $\bar{c} = a-bi$ حيث يسمى $\bar{c}$ مرافق العدد المركب c فإن $c.\bar{c} = a^2+b^2$

$(2-3i)(2+3i) = 4+9 = 13$

$(4+5i)(4-5i) = 16+25 = 41$

$(1+i)(1-i) = 1+1 = 2$

العدد	مرافقه	نظيره الجمعي	نظيره الضربي
$a+bi$	$a-bi$	$-a-bi$	$\frac{1}{a+bi}$
$3+7i$	$3-7i$	$-3-7i$	$\frac{1}{3+7i}$
$-2+5i$	$-2-5i$	$2-5i$	$\frac{1}{-2+5i}$
-4	-4	4	$\frac{1}{-4}$

i^3	i	$-i^3$	$\frac{1}{i^3}$
$(1,-4)$	$(1,4)$	$(-1,4)$	$\frac{1}{(1,-4)}$

خواص مرافق العدد المركب

$\forall\ c_1, c_2, c \in C$

1) $\overline{c_1+c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

2) $\overline{c_1 \cdot c_2} = \overline{c_1} \cdot \overline{c_2}$

3) $\overline{\overline{c}} = c$

4) $\overline{c_1} \cdot c = a^2+b^2$ فإن $c = a + bi$ اذا كان

5) $\overline{c} + c = 2a$

6) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$, $c_2 \neq 0$

7) $\overline{c} = c$ فان $c \in R$ اذا كان

النظير الضربي للعدد المركب

ملاحظات :

(١) عند ظهور (i) في المقام نضرب المقام والبسط بمرافق المقام لتبسيط الحل .

(٢) يمكن استخدام التعبير (مقلوب العدد المركب) بدل (النظير الضربي) ويرمز له بالرمز $c^{-1} = \frac{1}{c}$.

مثال : جد النظير الضربي لكل مما يأتي :

1) $c = 3+4i$

الحل : $c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

2) $c = (3-2i)^2 - 4i(1-2i)$

الحل : $(3-2i)^2 - 4i(1-2i) = (9-12i+4i^2) + (-4i+8i^2)$

$= (5-12i) + (-8-4i) = -3-16i$

$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{-3-16i} = \frac{1}{-3-16i} \cdot \frac{-3+16i}{-3+16i} = \frac{-3+16i}{9+256} = \frac{-3}{265} + \frac{16}{265}i$

مثال : جد عددين مركبين مترافقين مجموعيهما (6) وحاصل ضربهما (25)

الحل : لتكن $x = a+bi$, $y = a-bi$

$(a+bi) + (a-bi) = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$(a+bi).(a-bi)=25 \Rightarrow a^2+b^2=25 \Rightarrow 9+b^2=25 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow b=\mp 4$

∴ العددان هما $\Leftarrow$ $(3+4i)\,,(3-4i)$

مثال : اذا كان $(c_1=1+i)$ ، $(c_2=3-2i)$ فتحقق من الآتي :

1) $\overline{c_1+c_2}=\overline{c_1}+\overline{c_2}$

$LHS\quad \overline{c_1+c_2}=\overline{(1+i)+(3-2i)}=\overline{(1+3)+(1-2)i}=\overline{4-i}=4+i$

$RHS\quad \overline{c_1}+\overline{c_2}=(1-i)+(3+2i)=(1+3)+(-1+2)i=4+i$

2) $\overline{c_1.c_2}=\overline{c_1}.\overline{c_2}$

$LHS\quad \overline{c_1.c_2}=\overline{(1+i).(3-2i)}=\overline{(3-2i)+(3i-2i^2)}=\overline{5+i}=5-i$

$RHS\quad \overline{c_1}.\overline{c_2}=\overline{(1+i)}.\overline{(3-2i)}=(1-i)(3+2i)=3+2i-3i+2=5-i$

3) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

$LHS\quad \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}\right)}=\overline{\frac{3+2i+3i+2i^2}{9+4}}=\overline{\frac{1+5i}{13}}=\frac{1-5i}{13}=\frac{1}{13}-\frac{5i}{13}$

$RHS\quad \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}=\frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}}=\frac{1-i}{3+2i}=\frac{1-i}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{3-2i-3i+2i^2}{9+4}=\frac{1-5i}{13}=\frac{1}{13}-\frac{5i}{13}$

$LHS=RHS$

4) $\overline{\overline{c_1}}=c_1 \quad\rightarrow\quad \overline{\overline{c_1}}=\overline{\overline{1+i}}=\overline{1-i}=1+i=c_1$

مثال : اذا كان $\frac{3-2i}{i}$ ، $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل $x,y\in R$

الحل : لأن الجذران مترافقان $\frac{x-yi}{1+5i}=\overline{\frac{3-2i}{i}}$

$$\frac{x-yi}{1+5i}=\frac{3+2i}{-i}$$

$-i(x-yi)=(3+2i)(1+5i)$

$-ix+yi^2=3+15i+2i+10i^2$

$-xi-y=-7+17i$

$-xi=17i \rightarrow x=-17$ باستخدام خاصية التساوي

$-y=-7 \rightarrow y=7$

واجب : اكتب العدد بالصيغة العادية $\frac{2-i}{3+4i}$

مثال : اثبت ان العددين مترافقين $2+3i\ ,\ 2-3i$

الحل : جمع العددان $=2a$

$(2+3i)+(2-3i)=(2+2)+\big(3+(-3)\big)i=4+0i=4=2a$

حاصل ضربهما $=a^2+b^2$

العددان مترافقان $(2+3i)(2-3i) = 4-6i+6i-9i^2 = 4+9 = 13$

مثال : $x \in C$ وكان $\overline{x}$ مرافق له ، جد العدد المركب x اذا كان $2x+\overline{x} = 5i-4$

الحل : $\overline{x} = a-bi$, $x = a+bi$

في المعادلة $2(a+bi)+a-bi = 5i-4 \Rightarrow 2a+2bi+a-bi = 5i-4$

$$3a+bi = 5i-4$$

$$3a+bi = -4+5i$$

باستخدام خاصية التساوي $3a = -4 \Rightarrow a = \frac{-4}{3}$, $b = 5$

مثال : اذا كان $y = \frac{1-i}{i}$ ، $x = \frac{4+2i}{1+i}$ اثبت ان $x+y = 2-2i$

$$\text{LHS}: \quad x+y = \frac{4+2i}{1+i}+\frac{1-i}{i}$$

$$= \frac{4+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{1-i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$$

$$= \frac{4-4i+2i+2}{2}+(-i-1) = \frac{6-2i}{2}+(-i-1) = \frac{6}{2}-\frac{2i}{2}+(-i-1)$$

$$= 3-i+(-1-i) = 2-2i \quad : \text{RHS}$$

قسمة الاعداد المركبة

عند قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر نضرب بمرافق المقام وكما يلي : $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \times \frac{\overline{C_2}}{\overline{C_2}}$

مثال : ضع كلاً مما يأتي بالصورة $a+bi$

a) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i = 0+i$

b) $\frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \times \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-2-i-4i-2i^2}{(-2)^2+(1)^2} = \frac{0-5i}{5} = \frac{-5i}{5} = -i = 0-i$

مثال : ضع بالصيغة العادية العدد المركب $\frac{(3-2i)^2}{1+5i}$

$$\frac{(3-2i)^2}{1+5i} = \frac{9-12i-4}{1+5i} = \frac{5-12i}{1+5i} \times \frac{1-5i}{1-5i} = \frac{5-25i-12i+60i^2}{26} = \frac{-55-37i}{26} = \frac{-55}{26}-\frac{37}{26}i$$

ملاحظة : يمكن تحليل x^2+y^2 الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة $a+bi$

$$x^2+y^2 = x^2-y^2i^2 = (x-yi)(x+yi)$$

مثال : حلل كلاً مما يأتي الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث a,b أعداد نسبية :

a) 10   b) 39   c) 53   d) x^2+4

الحل :

a) $10 = 9 + 1 = 9 - i^2 = (3 - i)(3 + i)$

حل آخر $10 = 1 + 9 = 1 - 9i^2 = (1 - 3i)(1 + 3i)$

b) $39 = 36 + 3 = 36 - 3i^2 = (6 - \sqrt{3}i)(6 + \sqrt{3}i)$

c) $53 = 49 + 4 = 49 - 4i^2 = (7 - 2i)(7 + 2i)$

d) $x^2 + 4 = x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

مثال : حلل الى عاملين لعددين مركبين نسبيين :

1) $x^2 + 9 = x^2 - 9i^2 = (x - 3i)(x + 3i)$

2) $y^2 + 16x^2 = y^2 - 16x^2 i^2 = (y - 4xi)(y + 4xi)$

3) $(x-1)^2 + 4 = (x-1)^2 - 4i^2 = (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)$

4) $x^3 + \frac{1}{125} i = x^3 - \frac{1}{125} i \,.\, i^2 = x^3 - \frac{1}{125} i^3$

$= \left(x - \frac{1}{5} i\right)(x^2 + \frac{1}{5}xi + \frac{1}{25}i^2) = (x - \frac{1}{5} i)(x^2 + \frac{1}{5}xi - \frac{1}{25})$

5) $x^2 + 7xi - 12 = x^2 + 7xi + 12i^2 = (x + 4i)(x + 3i)$

مثال : حلل الى عاملين او اكثر لكل مما يأتي :

1) $4x^2 + 1 = 4x^2 - i^2 = (2x - i)(2x + i)$

2) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - i^2)$

$= (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$

3) $x^3 - i^3 = (x - i)(x^2 + xi + i^2) = (x - i)(x^2 + xi - 1)$

4) $x^2 - 2xi + 3 = x^2 - 2xi - 3i^2 = (x - 3i)(x + i)$

5) $x^2 + y^2 = x^2 - y^2(i^2) = x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$

6) $26 = 25 + 1 = 25 - i^2 = (5 - i)(5 + i)$

مثال : اكتب بالصيغة الجبرية بدون الضرب بالعامل المنسب :

1) $\frac{5}{1-2i} = \frac{1+4}{1-2i} = \frac{1-4i^2}{1-2i} = \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-2i} = 1 + 2i$

2) $\frac{10}{1+2i} = \frac{2\times5}{1+2i} = \frac{2(1+4)}{1+2i} = \frac{2(1-4i^2)}{1+2i} = \frac{2(1-2i)(1+2i)}{1+2i} = 2(1-2i) = 2 - 4i$

مثال : جد x , y التي تحقق $(x + yi)(2 - i) = 8 + i$

$x + yi = \frac{8+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}$

$x+yi=\frac{16+8i+2i-1}{4+1} = \frac{16+10i-1}{5}=\frac{15+10i}{5}=\frac{15}{5}+\frac{10i}{5}$

$x+yi= 3+2i$

$x=3 \quad , \quad y=2$ خاصية التساوي

مثال : جد x , y التي تحقق $x(x+i)+ y(y-i)=13-i$

الحل : نفتح الاقواس

$x^2+xi+y^2- yi=13-i$

$(x^2+y^2)+(x-y)i = 13-i$ خاصية التساوي

$x^2+y^2 = 13 \; \dots\dots\dots (1)$

$x-y=-1 \quad \dots\dots\dots (2)$

$\Rightarrow [-y=-1-x].(-1)$

$\Rightarrow \quad y=x+1 \dots\dots\dots (*)$ نعوض معادلة (*) في معادلة (١)

$x^2+(x+1)^2=13$

$x^2+x^2+2x+1=13 \Rightarrow 2x^2+2x+1-13=0$

$2x^2+2x-12=0 \quad] \quad \div 2$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3 \quad , \quad x=2$

$y=x+1 \Rightarrow y=2+1 \Rightarrow y=3$ عندما $x=2$

$y=x+1 \Rightarrow y=-3+1 \Rightarrow y=-2$ عندما $x=-3$

مثال : جد $x \;, y$ التي تحقق المعادلة $(2+xi)\,(-x+i)=\frac{9y^2+49}{3y+7i}$

$\underbrace{-2x}+2i-x^2i+\underbrace{xi^2}_{-x}=\frac{(9y^2-49i^2)}{3y+7i}$

$\underbrace{-3x}+(2-x^2)\,i=\frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$

$-3x+(2-x^2)i = 3y-7i$

$-3x=3y \Rightarrow -x=y$ خاصية التساوي

$2-x^2 = -7 \Rightarrow 2+7=x^2 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\mp3 \quad , \quad y=\pm3$

واجب : اكتب بالصيغة العادية للعدد المركب $\frac{(1-i)^9}{(1+i)^8}$

حل تمارين (1 − 1)

س1 / ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

i^5 , i^6 , i^{124} , i^{999} , i^{4n+1} , $\forall n \in N$, $(2+3i)^2 + (12+2i)$

$(10+3i)(0+6i)$, $(1+i)^4-(1-i)^4$, $\frac{12+i}{i}$, $\frac{3+4i}{3-4i}$, $\frac{i}{2+3i}$, $(\frac{3+i}{1+i})$, $\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i}$, $(1+i)^3 + 1+i$

$i^5 = i^4 . i = (1) . i = i = 0 + i$

$i^6 = i^4 . i^2 = (1).(-1) = -1 = -1+0i$

$i^{124} = (i^4)^{31} = (1)^{31} = 1 = 1+0i$

$i^{999} = (i^4)^{249}\, i^3 = (1) . i^2 . i = -i = 0-i$

$i^{4n+1} = i^{4n}. i = (i^4)^n . i = (1). i = i = 0+i$

- $(2+3i)^2 + (12+2i) = 4+12i+9i^2+(12+2i) = (-5+12i)+(12+2i)$

  $= 7+14i$

- $(10+3i)(0+6i) = 0+60\,i+0+18i^2 = -18+60i$
- $(1+i)^4-(1-i)^4 = [(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2$

  $= [1+2i+i^2]^2 - [1-2i+i^2]^2 = (2i)^2-(-2i)^2 = 4i^2-4i^2 = 0 = 0+0i$

- $\frac{12+i}{i}\times\frac{-i}{-i} = \frac{-12i-i^2}{-i^2} = \frac{1-12i}{1} = 1-12i$
- $\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{9+12i+12i+16i^2}{3^2+4^2} = \frac{-7+24i}{9+16} = \frac{-7}{25}+\frac{24}{25}i$
- $\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2i-3i^2}{2^2+3^2} = \frac{3+2i}{4+9} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$
- $(\frac{3+i}{1+i})^3 = (\frac{3+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i})^3$

ملاحظة : عدد مركب بصورة كسرية مرفوع لقوة يضرب داخل القوس في المرافق اولا ثم يبسط وبعدها نتخلص من القوة المرفوع لها .

$= (\frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2})^3 = (\frac{4-2i}{2})^3 = (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i)$

$= (4-4i+i^2)(2-i) = (3-4i)(2-i) = 6-3i-8i+4i^2$

$= 2-11i$

- $\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2} = \frac{-10+11i}{5-3i}\times\frac{5+3i}{5+3i} = \frac{-50-30i+55i+33i^2}{5^2+3^2}$

  $= \frac{-83+25i}{25+9} = \frac{-83}{34}+\frac{25}{34}i$

- $(1+i)^3 + (1-i)^3$

  $= (1+i)^2(1+i)+(1-i)^2(1-i)$

$= (1+2i+i^2)(1+i)+(1-2i+i^2)(1-i) = (2i)(1+i)+(-2i)(1-i)$

$= 2i+2i^2-2i+2i^2 = -4 = -4+0i$

س2 / جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة الاتية :

a) $y+5i = (2x+i)(x+2i)$

$y+5i = 2x^2+4xi+xi+2i^2 \Rightarrow y+5i = (2x^2-2)+(4x+x)i$

$y+5i = (2x^2-2)+5xi$

$y = (2x^2-2)$ ……(1)

$5 = 5x$ ……(2)

$x = 1$ نعوض في معادلة (١)

$y = 2(1)^2-2 = 2-2 = 0 \Rightarrow y = 0$

b) $8i = (x+2i)(y+2i)+1$

$8i = xy+2xi+2yi+4i^2+1$

$8i = (xy-3)+(2x+2y)i$

$xy-3 = 0 \Rightarrow xy = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$ ………(1)

$2x+2y = 8\ ]\ \div 2 \Rightarrow x+y = 4 \Rightarrow y = 4-x$ ………(2)

$y = \frac{3}{x} \Rightarrow 4-x = \frac{3}{x} \Rightarrow x(4-x) = 3$

$4x-x^2 = 3 \Rightarrow x^2-4x+3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

either $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$ نعوض في معادلة (٢) $\Rightarrow y = 1$

or $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ نعوض في معادلة (٢) $\Rightarrow y = 3$

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi) = (1+2i)^2$

$(x+yi) = (1+2i)^2-\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = (1+4i+4i^2)-\left(\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)$

$(x+yi) = -3+4i-\left(\frac{1-i-i+i^2}{1^2+1^2}\right)$

$(x+yi) = -3+4i-\left(\frac{-2i}{2}\right) = -3+4i+i$

$x+yi = -3+5i \Rightarrow x = -3\ ,\ y = 5$

d) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

$\left[\frac{2-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right]x+\left[\frac{3-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}\right]y = \frac{i^4}{i}$

$\left[\frac{2-2i-i+i^2}{1^2+1^2}\right]x+\left[\frac{6-3i-2i+i^2}{2^2+1^2}\right]y = i^3$

$\left[\frac{1-3i}{2}\right]x+\left[\frac{5-5i}{5}\right]y = -i\ ]\times 10 \Rightarrow 5(1-3i)x+2(5-5i)y = -10i$

$5x - 15xi + 10y - 10yi = 0 - 10i$

$5x + 10y = 0 \quad \ldots\ldots(1)$

$-15x - 10y = -10 \quad \ldots\ldots(2)$ بالجمع

$-10x = -10 \Rightarrow x = 1$ نعوض في معادلة (١)

$5(1) + 10y = 0 \Rightarrow 10y = -5 \Rightarrow y = \frac{-5}{10} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$

س3 / اثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

$$\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{1}{4-4i+i^2} - \frac{1}{4+4i+i^2}$$

$$= \frac{1}{4-4i-1} - \frac{1}{4+4i-1} = \frac{1}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} - \frac{1}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{3+4i}{9+16} - \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3+4i}{25} - \frac{3-4i}{25} = \frac{3+4i-3+4i}{25} = \frac{8}{25}i$$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$ وزاري ٢٠١٢ / د٣

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1+i} + \frac{1+2i+i^2}{1-i} = \frac{-2i}{1+i} + \frac{2i}{1-i}$$

$$= \frac{-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{-2i+2i^2}{1^2+1^2} + \frac{2i+2i^2}{1^2+1^2}$$

$$= \frac{-2i-2}{2} + \frac{2i-2}{2} = \frac{-2i}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2i}{2} - \frac{2}{2} = -i - 1 + i - 1 = -2$$

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = (1-i)(1+1)(1-(-i)) = (1-i)(2)(1+i)$$

$$(1-i)(2+2i) = 2 + 2i - 2i - 2i^2 = 2 + 2 = 4$$

س4 / حلل كلا من الاعداد 85 و 41 و 125 و 29 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان نسبيان .

$85 = 81 + 4 = 81 - 4i^2 = (9-2i)(9+2i)$

$41 = 25 + 16 = 25 - 16i^2 = (5-4i)(5+4i)$

$125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11-2i)(11+2i)$

$29 = 25 + 4 = 25 - 4i^2 = (5-2i)(5+2i)$

س5 / جد قيمة x , y الحقيقيين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

$$\frac{6}{x+yi} = \overline{\frac{3+i}{2-i}}$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{3-i}{2+i} \Rightarrow (6)(2+i) = (x+yi)(3-i) \Rightarrow x+yi = \frac{12+6i}{3-i}$$

$$x+yi = \frac{12+6i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{36+12i+18i+6i^2}{3^2+1^2} = \frac{36-6+30i}{9+1}$$

$$x+yi = \frac{36-6+30i}{9+1} = \frac{30+30i}{10} \Rightarrow x+yi = 3+3i$$

$\boxed{x=3}$, $\boxed{y=3}$

أمثلة أضافية محلولة

مثال : أكتب بالصيغة العادية أو الجبرية كل مما يأتي :

1) $(5+3i)(1+i) + (2-i)^2$

$$(5+5i+3i+3i^2) + 4 - 4i + i^2 = (2+8i) + (3-4i) = 5+4i$$

2) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{3}-3i-i+\sqrt{3}i^2}{1^2+(\sqrt{3})^2}\right)^9$

$$= \left(\frac{-4i}{4}\right)^9 = (-i)^9 = (-i)(-i)^8 = -i = 0 - i$$

3) $(1-\sqrt{-3})^2 + (2-\sqrt{-3})^2$

$$(1-\sqrt{3}i)^2 + (2-\sqrt{3}i)^2 = (1-2\sqrt{3}i+3i^2) + (4-4\sqrt{3}i+3i^2)$$

$$= (-2-2\sqrt{3}i) + (1-4\sqrt{3}i) = -1-6\sqrt{3}i$$

مثال : جد عددين مركبين مترافقين مجموعهما 6 وحاصل ضربهما 10

الحل : نفرض أن العدد هو $c_1 = a+bi$ عدد مركب مرافقه هو $c_2 = a-bi$

$$\because\ c_1 + c_2 = 2a \Rightarrow 6 = 2a \Rightarrow a = 3$$

$$\because\ c_1 . c_2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 10 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$\therefore$ العددان هما $(3+i)$, $(3-i)$

مثال : أكتب العدد $(3+2i)(-2+i)$ بالصيغة العادية ثم جد النظير الضربي له بالصيغة الديكارتية

الحل :

الصيغة الجبرية $(3+2i)(-2+i) = (-6+3i-4i+2i^2) = -8-i$

الصيغة الديكارتية $\frac{1}{-8-i} = \frac{1}{-8-i} \times \frac{-8+i}{-8+i} = \frac{-8+i}{(-8)^2+1^2} = \frac{-8}{65} + \frac{i}{65} = \left(\frac{-8}{65}, \frac{1}{65}\right)$

مثال : اذا كان $x = -1 + 2i$ فأوجد قيمة المعادلة $x^2 + 2x + 5$

الحل :

$$x^2 + 2x + 5 = (-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 5$$
$$= (1 - 4i + 4i^2) + (-2 + 4i) + 5 = (-3 - 4i) + (-2 + 4i) + 5$$
$$= 0 + 0i$$

مثال : اذا كان $x \in \mathbb{C}$ و $\overline{x}$ مرافق له جد العدد المركب الذي يحقق $3x + \overline{x} = 2i + 3$

الحل : $x = a + bi \quad \therefore \quad \overline{x} = a - bi$

$$3(a+bi) + (a - bi) = 2i + 3 \Longrightarrow 3a + 3bi + a - bi = 2i + 3$$
$$3a + a = 3 \ \Longrightarrow 4a = 3 \ \Longrightarrow a = \frac{3}{4}$$
$$3b - b = 2 \Longrightarrow 2b = 2 \ \Longrightarrow b = 1$$
$$\therefore \ x = a + bi = \frac{3}{4} + i$$

مثال : اذا كان $K = \frac{13-i}{4+i}$, $L = \frac{7-i}{2-i}$ أثبت أن L , K مترافقان $L^2K + LK^2$

الحل : نثبت أن ناتج عملية الجمع والضرب ينتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقة R

$$K = \frac{13-i}{4+i} = \frac{13-i}{4+i} \times \frac{4-i}{4-i} = \frac{52 - 13i - 4i + i^2}{4^2 + 1^2} = \frac{51 - 17i}{17}$$
$$= \frac{51}{17} - \frac{17i}{17} = 3 - i$$
$$L = \frac{7-i}{2-i} = \frac{7-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{14 + 7i - 2i - i^2}{2^2 + 1^2} = \frac{15 + 5i}{5} = 3 - i$$
$$(3+i) + (3-i) = \ 6 \in R$$
$$(3+i)(3-i) = \ 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10 \ \in R$$
$$L^2K + LK^2 = LK(L+K) = (10)(6) = 60 \qquad \therefore \ L , K \ \text{مترافقان}$$

مثال : أكتب بالصيغة العادية أو الجبرية بدون الضرب بالعامل المنسب (المرافق)

a) $\frac{5}{2-i} = \frac{4+1}{2-i} = \frac{4-i^2}{2-i} = \frac{(2-i)(2+i)}{2-i} = 2 + i$

b) $\frac{13}{2+3i} = \frac{4+9}{2+3i} = \frac{4-9i^2}{2+3i} = \frac{(2+3i)(2-3i)}{2+3i} = 2 - 3i$

c) $\frac{10}{2+i} = \frac{2(5)}{2+i} = \frac{2(4+1)}{2+i} = \frac{2(4-i^2)}{2+i} = \frac{2(2+i)(2-i)}{2+i} = 2(2-i) = 4 - 2i$

مثال : أوجد قيمة x , y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلة في ما يأتي :

$$(x + yi)(a + bi) = 1$$
$$(x + yi) = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad , \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

واجبات

س / أوجد قيمة x , y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلة فيما يأتي :

1) $(x + yi)^2(1 + i)^2 = 1$
2) $(x + yi)^{-1} = \frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}$
3) $\frac{1}{1+i} = \frac{(x+yi)^2}{(1+i)^3}$
4) $x + yi = (5 + 2i)^{-2}$

س / ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

a) $(3 + 4i)^{-1}$ b) $(1 + 2i)^{-2}$

الجذور التربيعية للعدد المركب

اذا كان $x^2 = a$ فإن $x = \pm\sqrt{a}$ وهي الجذور التربيعية للعدد (a) أما اذا كانت $x^2 = 4$ فإن $x = 2$ هو أحد جذري المعادلة ولإيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب لاحظ الأمثلة التالية:

مثال : جد الجذور التربيعية للعدد المركب $c = 8 + 6i$

$$8 + 6i = (a + bi)^2 \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 8 + 6i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 8 + 6i$$

$$a^2 - b^2 = 8 \; \dots \dots (1)$$

$$2ab = 6 \dots \dots \dots \dots (2)] \div 2$$

$$ab = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{a} \dots \dots (*)$$ نعوض معادلة $(*)$ في (1)

$$a^2 - \frac{9}{a^2} = 8 \quad] \times a^2 \Rightarrow a^4 - 9 = 8a^2 \Rightarrow a^4 - 8a^2 - 9 = 0$$

$$(a^2 - 9)(a^2 + 1) = 0$$

$$either \quad a^2 - 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$b = \frac{3}{a} = \frac{3}{\pm 3} \Rightarrow b = \pm 1$$

$$or \;\; a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1$$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $3 + i \; , -3 - i$

ملاحظة : نلاحظ أن a , b تأخذ قيم حقيقية فقط فلذلك $a^2 = -1$ وهي قيمة تخيلية تهمل .

مثال : جد الجذور التربيعية للعدد $-i$

$$-i = (a+bi)^2$$

$$0 - i = a^2 + 2abi - b^2 \Rightarrow\ 0 - i = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow$$

$$a^2 - b^2 = 0\ \dots\dots(1)$$

$$2ab = -1\ \dots\dots\dots(2)$$

$$b = \frac{-1}{2a}\ \dots\dots\dots(*)$$ نعوض معادلة $(*)$ في (١)

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = 0\ ]\ \times\ 4a^2$$

$$4a^4 - 1 = 0\ \Rightarrow (2a^2-1)(2a^2+1) = 0$$

$$either\ 2\,a^2 - 1 = 0 \Rightarrow\ a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \Rightarrow b = \frac{-1}{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}}$$

$$or\ 2a^2 + 1 = 0\ \Rightarrow\ 2a^2 = -1\ \Rightarrow a^2 = \frac{-1}{2}$$ تهمل

الجذران هما $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\ ,\ \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

مثال : جد الجذر التربيعي للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$

$$-1+\sqrt{3}i = (x+yi)^2$$

$$-1+\sqrt{3}i = (x^2-y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = -1\ \dots\dots(1)\qquad ,\qquad 2xy = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2x}\ \dots\dots(2)$$

$$x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = -1$$

$$x^2 - \frac{3}{4x^2} = -1 \xrightarrow{\text{نضرب } \times 4x^2} 4x^4 - 3 = -4x^2 \Rightarrow\ 4x^4 + 4x^2 - 3 = 0$$

$$(2x^2+3)(2x^2-1) = 0$$

$$2x^2 + 3 = 0\ \Rightarrow\ 2x^2 = -3$$ تهمل حيث $x \in R$

$$2x^2 = 1 \Rightarrow\ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

الجذران التربيعيان $y = \pm\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ Z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

مثال : جد الجذر التربيعي للعدد $8i$

$$8i = (a+bi)^2$$

$$0 + 8i = a^2 + 2abi - b^2 \Rightarrow 0 + 8i = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$a^2 - b^2 = 0 \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$2ab = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$b = \frac{8}{2a} \Rightarrow b = \frac{4}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

$$a^2 - \frac{16}{a^2} = 0 \ ] \times a^2 \Rightarrow a^4 - 16 = 0 \Rightarrow (a^2+4)(a^2-4) = 0$$

$either \ \ a^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow \ a^2 = -4$ تهمل

$or \qquad a^2 - 4 = 0 \ \Rightarrow \ a = \pm 2$ نعوض معادلة (*) في (١)

$$b = \frac{4}{\pm 2} = \pm 2$$

∴ الجذران هما $-2 - 2i \quad , \quad 2 + 2i$

مثال : جد الجذر التربيعي للعدد -25

$$c^2 = -25 \Rightarrow c = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25\,(-1)} = \pm\sqrt{25i^2} = \pm 5i$$

حل المعادلات التربيعية في $\mathbb{C}$

كل معادلة تربيعية لا يمكن حلها بطريقة التجربة فهي تحل بطريقة الدستور فمثلاً

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث $a \neq 0$ و $a, b, c \in R$ فإن $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ونلاحظ أنه اذا كان مقدار المميز $(b^2 - 4ac)$ سالبا فإن مجموعة الحلول الخاصة بالمعادلة تنتمي الى مجموعة الاعداد المركبة ويوجد نوعان من حل المعادلات التربيعية .

النوع الأول : المميز لا يحتوي على (i)

مثال : حل المعادلة التربيعية $x^2 + 4x + 5 = 0$ في مجموعة الاعداد المركبة

الحل : حسب قانون الدستور فأن $a = 1 \ , \ b = 4 \ , \ c = 5$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(5)}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{4\,(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{4\,i^2}}{2} = \frac{-4\pm 2i}{2} \Rightarrow x = -2\pm i$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{-2-i\,,-2+i\}$

ملاحظة : من قانون الدستور نعلم أن جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ التي معاملاتها الحقيقية هي :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2 = \frac{-2b}{2a} \Rightarrow \boxed{x_1+x_2 = \frac{-b}{a}}$$ مجموع الجذرين

$$x_1.x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$ حاصل ضرب الجذرين

ويمكن الاستفادة من الخاصية أعلاه في ايجاد الجذور التربيعية وكما يلي :

x^2 −(مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

مثال : جد المعادلة التربيعية التي جذرها $\pm(2+2i)$

الحل : نتبع صيغة المعادلة اعلاه في التطبيق

$(2+2i)+(-2-2i) = (2-2)+(2-2)i = 0+0i$ مجموع الجذرين

$(2+2i)(-2-2i) = -4-4i-4i-4i^2 = -4-8i+4 = -8i$ ضرب الجذرين

x^2 −(مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

$$x^2-(0)x+(-8i) = 0 \Rightarrow x^2-8i = 0$$

ملاحظة : عندما يعطى في السؤال كون المعادلة التربيعية التي [معاملاتها الحقيقية] وأحد جذريها مثلا $a+bi$ فسيكون الجذر الثاني مرافق الجذر الاول $a-bi$

مثال : كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3-4i$

الحل : بما ان معاملات المعادلة حقيقية وأحد الجذرين $3-4i$ فإن الجذر الاخر هو المرافق ويساوي $3+4i$

$(3-4i)+(3+4i) = 3+3+(-4+4)i = 6$ مجموع الجذرين

$(3+4i)(3-4i) = 9+12i-12i-16i^2 = 9+16 = 25$ ضرب الجذرين

طريقة اخرى في الحل :

في مثل هذه الاسئلة نعتمد على قواعد المرفق للعدد المركب وكما يأتي :

$$C\,.\,\overline{C} = a^2+b^2 \quad , \quad C+\overline{C} = 2a$$

x^2 − (مجموع الجذرين)x+(حاصل ضرب الجذرين) $= 0 \Rightarrow x^2-6x+25 = 0$

ملاحظة : لا يحل السؤال لتالي $x^4+10\,x^2+9=0$ بالتجربة اذا اصبح بهذه الصورة $x^4+10\,x^2-9i^2=0$ لان الحد الوسط لا يحتوي على (i) ، لذلك نقوم بحله مباشرة بطريقة التجربة. والناتج من عملية التجربة نستخدم معه الطريقة السابقة وهي اضافة i^2 لغرض تحليل الاقواس الناتجة من التجربة .

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة $x^4+10\,x^2+9=0$

الحل :

$$x^4+10\,x^2+9=0$$
$$(x^2+9)(x^2+1)=0$$
$$(x^2-9i^2)(x^2-i^2)=0$$
$$(x+3i)(x-3i)(x+i)(x-i)=0$$

أما $x+3i=0 \Rightarrow x=-3i$

او $x-3i=0 \Rightarrow x=3i$

$x+i=0 \Rightarrow x=-i$

$x-i=0 \Rightarrow x=i$

مجموعة الحل هي $\{3i\,,-3i\,,i\,,-i\}$

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2-6x+13=0$

الحل : في مثل هذه الانواع من المعادلات التي لا تتحلل باي نوع من التحاليل نستخدم (طريقة الدستور)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1\,,\ b=-6\,,\ c=13$ تعوض في القانون الدستور

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-(4)(1)(13)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}\Rightarrow x=\frac{6}{2}\pm\frac{4i}{2}\Rightarrow x=3\pm2i$$

مجموعة الحل للمعادلة في C جذران مترافقان $\{3+2i\,,3-2i\}$

مثال : جد مجموعة حل المعادلة $x^2+4\,x+5=0$

الحل :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1\,,\ b=4\,,\ c=5$ تعوض في القانون الدستور

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-(4)(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$x = -2 - i \quad , \quad x = -2 + i \quad , \quad \{-2 - i \, , -2 + i\}$ مجموعة الحل

مثال : جد مجموعة حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$

الحل : $\because -i = i^3$

$$x^3 + 8i^3 = 0$$

$$(x+2i)(x^2 - 2ix - 4) = 0 \qquad either \ (x+2i) = 0 \ \Longrightarrow x = -2i$$

$$or \ \ (x^2 - 2ix - 4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1 \ , \ b = -2i \ , \ c = -4$$

$$x = \frac{2i \pm \sqrt{-4-(4)(-4)}}{2}$$

$$x = \frac{2i \pm \sqrt{-4+16}}{2} \Longrightarrow x = \frac{2i \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2i}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$either \ \ x = i + \sqrt{3} \quad or \quad x = i - \sqrt{3}$$

مجموعة الحل $\{\sqrt{3} + i \ , -\sqrt{3} + i \, , -2i\}$

ملاحظة : اذا علمت من المعادلة جذراها اي (جد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها) هذه الحالة هي عكس الامثلة السابقة يعني الجذور معطاة والمطلوب حل المعادلة .

مثال : جد المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها النظير الضربي للعدد المركب $\frac{10-5i}{2+i}$

الحل :

١- يستخرج النظير الضربي $\frac{2+i}{10-5i}$

٢- يستخدم الحل بالضرب بالمرافق للمقام $\frac{2+i}{10-5i} \times \frac{10+5i}{10+5i}$

$$= \frac{(20-5) + i(10+10)}{100+25}$$

$$= \frac{15+20i}{125} = \frac{15}{125} + \frac{20}{125}i$$

الجذر الاول $(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ ، الجذر الثاني (المرافق) $(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i)$

جمع الجذرين $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i + \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i = \frac{6}{25}$

$\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)=\left(\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{4}{25}\right)^2=\frac{9}{625}+\frac{16}{625}=\frac{1}{25}$ ضرب الجذرين

$$x^2-\frac{6}{25}x+\frac{1}{25}=0 \Rightarrow 25x^2-6x+1=0$$

فمثلا اذا كان لدينا الكسر الاتي : $\left(\frac{2+5i}{3+2i}\right)^2$

ملاحظة : سنضرب الكسر في المرافق لنتخلص من المقام وبعدها يكون لدينا عدد مركب نفتح التربيع ويبسط ونجعله عدد مركب واحد .

مثال : $2x^2+ax+b=0$ هي المعادلة التربيعية التي أحد جذريها $3+i$ جد قيمة a و b التي تنتمي الى R .

الحل : لم يذكر معاملات حقيقية هنا وعوض عنها بأنها تنتمي الى R لذلك احد جذريها $3+i$ اذن يكون الجذر الاخر $3-i$ اي (المرافق) .

$$x^2-ax+b=0$$

$x^2 -$ جمع الجذرين $x +$ ضرب ب الجذرين $= 0$

$3+i+3-i=6$ جمع الجذرين

$(3+i)(3-i)=9+1=10$ ضرب الجذرين

المعادلة الاصلية فيها 2 وهو معامل x^2 لذلك نضرب كل من مجموع الجذرين وحاصل ضربهما في 2 لان المعادلة الأصلية هي : $2x^2+ax+b=0$

$$2\times 6=12$$

$$2\times 10=20$$

$2x^2-12x+20=0 \qquad a=-12 \quad , \quad b=20$

النوع الثاني : المميز يحتوي على (i)

مثال : جد مجموعة حل المعادلة $z^2-3z+3+i=0$

$$a=1 \quad , \quad b=-3 \quad , \quad c=(3+i)$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{9-4(1)(3+i)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9-12-4i}}{2}$$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2} \quad \ldots\ldots(1)$$

$[\sqrt{-3-4i}=a+bi\ ]$ بتربيع الطرفين

$$\sqrt{-3-4i}=(a+bi)^2$$

$$-3-4i=(a^2-b^2)+2abi$$
$$a^2-b^2=-3 \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$
$$-4=2ab \Longrightarrow b=\frac{-4}{2a}=\frac{-2}{a} \quad .\dots\dots\dots..(3)$$
$$-3=a^2-\frac{4}{a^2} \quad \left(a^2 \times \text{نضرب}\right)$$
$$a^2-4=-3a^2 \;\Longrightarrow\; a^4+3a^2-4=0$$
$$(a^2+4)(a^2-1)=0$$
$$either \quad a^2+4=0 \;\Longrightarrow\; a^2=-4 \quad \text{تهمل}$$
$$or \qquad a^2-1=0 \;\Longrightarrow\; a^2=1 \Longrightarrow a=\pm 1$$
$$b=\frac{-2}{a} \Longrightarrow b=\frac{-2}{\pm 1} \;\Longrightarrow b=\mp 2$$

∴ الجذران $1-2i\ ,-1+2i$ نعوض في معادلة (١)

$$either\ z=\frac{3-1+2i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$
$$or \qquad z=\frac{3+1-2i}{2}=\frac{4-2i}{2}=2-i$$

مجموعة الحل= $\{2-i\ ,1+i\ \}$ والجذران غير مترافقان

حل تمارين $(1-2)$

س1 / حل المعادلات التربيعية الاتية وبين اي منهما يكون جذراها مترافقان :

a) $z^2=-12$

$$z^2=12i^2 \Longrightarrow z=\sqrt{12i^2} \Longrightarrow z=\pm 2\sqrt{3}i$$ جذران مترافقان

c) $2z^2-5z+13=0$

$$a=2 \quad , \quad b=\ -5 \quad , \quad c=13$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times 2\times 13}}{2\times 2}=\frac{5\pm\sqrt{25-104}}{4}$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{-79}}{4} \Longrightarrow x=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{79}i}{4} \qquad x=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}i}{4}$$ جذران مترافقان

d) $z^2+2z+i(2-i)=0$

$$\boxed{a=1 \quad , \quad b=2 \quad , \quad c=i(2-i)=2i-i^2=2i+1}$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(2i+1)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4-8i}}{2}$$

$z = \frac{-2 \pm \sqrt{-8i}}{2}$ ……(1)   نجد قيمة الجذر

$[\sqrt{-8i} = a + bi]$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow (a+bi)^2 = -8i$

$(a^2 - b^2) + 2abi = 0 - 8i$

$a^2 - b^2 = 0$ ……(2)

$-8 = 2ab \Rightarrow a = \frac{-8}{2b} \Rightarrow a = \frac{-4}{b}$ ……(3)

$(\frac{-4}{b})^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \frac{16}{b^2} - b^2 = 0$ $($ نضرب $\times -b^2)$

$b^4 - 16 = 0 \Rightarrow (b^2 - 4)(b^2 + 4) = 0$

either $b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b^2 = 4 \rightarrow \boxed{b = \pm 2}$

$a = \frac{-4}{b} \Rightarrow a = \frac{-4}{\pm 2} \Rightarrow a = \mp 2$

الجذران هما $2 - 2i \;, -2 + 2i$

or $b^2 + 4 = 0 \Rightarrow b^2 = -4$ تهمل

either $z = \frac{-2+2-2i}{2} = \frac{-2i}{i} = -i$

or $z = \frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{2i}{2} = -2 + i$

الجذران غير مترافقان $\{-i \;, -2 + i\}$

e) $4z^2 + 25 = 0$

$4z^2 = -25 \Rightarrow z^2 = \frac{-25}{4} \Rightarrow z^2 = \frac{25i^2}{4} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{25i^2}{4}}$

$z = \pm \frac{5i}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{\frac{5i}{2} \;, -\frac{5i}{2}\}$ والجذران مترافقان

f) $z^2 - 2zi + 3 = 0$

$\boxed{a = 1 \;, \; b = -2i \;, \; c = 3}$

$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{-4 - (4)(1)(3)}}{2(1)}$

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i$$
$$z = i + 2i = 3i \quad , \quad z = i - 2i = -i$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{-i \ , 3i\}$ والجذران غير مترافقان

حل آخر :

$$z^2 - 2zi + 3 = 0 \Rightarrow (z - 3i)(z + i) = 0$$

$$either\ \ z - 3i = 0 \Rightarrow \boxed{z = 3i} \quad or\ \ z + i = 0 \Rightarrow \boxed{z = -i}$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{-i \ , 3i\}$ والجذران غير مترافقان

س2 / كون المعادلة التربيعية التي جذراها M , L حيث :

a) $M = 1 + 2i \qquad L = 1 - i$

$(1 + 2i) + (1 - i) = (1 + 1) + (2 - 1)i = 2 + i$ مجموع الجذرين

$(1 + 2i)(1 - i) = 1 - i + 2i - 2i^2 = 3 + i$ ضرب الجذرين

$\because\ x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore\ x^2 - (2 + i)x + (3 + i) = 0$ المعادلة التربيعية

b) $M = \frac{3-i}{1+i} \qquad L = (3 - 2i)^2$

$$M = \frac{3-i}{1+i} = \frac{3-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2-4i}{2} \quad \Rightarrow M = 1 - 2i$$

$$L = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i \Rightarrow L = 5 - 12i$$

$(1 - 2i) + (5 - 12i) = (1 + 5) + (-2 - 12)i = 6 - 14i$ مجموع الجذرين

$(1 - 2i)(5 - 12i) = 5 - 12i - 10i + 24i^2 = -19 - 22i$ حاصل ضرب الجذرين

$\because\ x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore\ x^2 - (6 - 14i\ )x + (-19 - 22i) = 0$ المعادلة التربيعية

س3 / جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الاتية :

a) $-6i$

$a + bi = \sqrt{-6i}$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow\ (a + bi)^2 = -6i$

$$a^2 + 2abi + b^2i^2 = -6i \Rightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)i = -6i$$

$$a^2 - b^2 = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$2ab = -6 \Rightarrow b = \frac{-6}{2a} \Rightarrow b = \frac{-3}{a} \ldots\ldots (2)$$

$$a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = 0 \Rightarrow a^2 - \frac{9}{a^2} = 0 \xrightarrow{(a^2 \times \text{نضرب})} a^4 - 9 = 0$$

$$a^4 - 9 = 0 \Rightarrow (a^2 - 3\ )(a^2 + 3) = 0$$

$either \quad a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

$b = \frac{-3}{a} \Rightarrow b = \frac{-3}{\pm\sqrt{3}} \Rightarrow b = \mp\sqrt{3}$

$or \quad a^2 + 3 = 0 \Rightarrow a^2 = -3$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $\sqrt{3} - \sqrt{3}i \quad , \quad -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

b) $7 + 24i$

$a + bi = \sqrt{7 + 24i} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a + bi)^2 = 7 + 24i$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = 7 + 24i \Rightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)i = 7 + 24i$

$a^2 - b^2 = 7 \ldots\ldots (1)$

$2ab = 24 \Rightarrow b = \frac{24}{2a} \Rightarrow b = \frac{12}{a} \ldots\ldots (2)$

$a^2 - \left(\frac{12}{a}\right)^2 = 7 \Rightarrow a^2 - \frac{144}{a^2} = 7 \xrightarrow{(\text{نضرب} \times a^2)} a^4 - 144 = 7a^2$

$a^4 - 7a^2 - 144 = 0 \Rightarrow (a^2 - 16)(a^2 + 9) = 0$

$either \quad a^2 - 16 = 0 \Rightarrow (a + 4)(a - 4) = 0 \Rightarrow a = \pm 4$

$b = \frac{12}{a} \Rightarrow b = \frac{12}{4} = 3$

$b = \frac{12}{a} \Rightarrow b = \frac{12}{-4} = -3$

$or \quad a^2 + 9 = 0 \Rightarrow a^2 = -9$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $-4 - 3i \quad , \quad 4 + 3i$

c) $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

يجب تحويله الى الصيغة $a + bi$ عن طريق الضرب بمرافق المقام

$$\frac{4}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{4}{1 - \sqrt{3}i} \times \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{1 + 3}$$

$$\frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{4} = 1 + \sqrt{3}i$$

$a + bi = \sqrt{1 + \sqrt{3}i} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a + bi)^2 = 1 + \sqrt{3}i$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)i = 1 + \sqrt{3}i$

$a^2 - b^2 = 1 \ldots\ldots (1)$

$2ab = \sqrt{3} \Rightarrow \quad a = \dfrac{\sqrt{3}}{2b} \quad \dots\dots(2)$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2b}\right)^2 - b^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{3}{4b^2} - b^2 = 1 \xrightarrow{(\text{نضرب} \times 4b^2)} 3 - 4b^4 = 4b^2$

$4b^4 + 4b^2 - 3 = 0 \Rightarrow (2b^2+3)(2b^2-1) = 0$

$either \quad 2b^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2b} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \Rightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$or \quad 2b^2 + 3 = 0 \Rightarrow 2b^2 = -3$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i \quad , \quad -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

س4 / ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو :

a) i

$\because$ المعاملات أعدادحقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق وهو $-i$

$i + (-i) = (0+0) + (1-1)i = 0 + 0i$ مجموع الجذرين

$i\,.(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$ ضرب الجذرين

$\because \; x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore \; x^2 - (0)x + (1) = 0$

$x^2 + 1 = 0$ المعادلة التربيعية

b) $5 - i$

$\because$ المعاملات أعدادحقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق وهو $5 + i$

$(5-i) + (5+i) = (5+5) + (-1+1)i = 10$ مجموع الجذرين

$(5-i)(5+i) = 25 + 1 = 26$ ضرب الجذرين

$\because \; x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore \; x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $\dfrac{\sqrt{2}+3i}{4}$

$\because$ المعاملات أعدادحقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق وهو $\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{3}{4}i$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{3}{4}i\right) + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{3}{4}i\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}\right)i = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{3}{4}i\right).\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{3}{4}i\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{2}{16} + \dfrac{9}{16} = \dfrac{11}{16}$

$\because\ x^2 - ($مجموع الجذرين$)x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

$\therefore\ x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{11}{16} = 0$

س5 / اذا كان $3+i$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ ؟ وما قيمة الجذر الآخر ؟ وزاري ٢٠١١ / د١

الحل : نفرض الجذر الآخر هو k

$(3+i) + k = a \quad \dots\dots(1)$ مجموع الجذرين

$(3+i)\,k = 5+5i$ ضرب الجذرين

$k = \frac{5+5i}{3+i} = \frac{5+5i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} = \frac{15-5i+15i-5i^2}{3^2+1^2} = \frac{20+10i}{10} = 2+i \Rightarrow \therefore k = 2+i$ الجذر الآخر

$\because (3+i) + k = a \Rightarrow (3+i) + (2+i) = a \Rightarrow a = 5+2i$

أمثلة أضافية محلولة

مثال : أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب $-55-48i$ ثم استخدم الناتج في ايجاد الحل للمعادلة التربيعية التالية $x^2 + (1+2i)x + 13(1+i) = 0$

الحل : نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $-55-48i$ هو $a+bi$

$a+bi = \sqrt{-55-48i} \xRightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a+bi)^2 = -55-48i$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = -55-48i \Rightarrow (a^2-b^2) + (2ab)i = -55-48i$

$a^2 - b^2 = -55 \dots\dots\dots(1)$

$2ab = -48 \Rightarrow a = \frac{-48}{2b} \Rightarrow a = \frac{-24}{b} \quad \dots\dots\dots..(2)$

$\left(\frac{-24}{b}\right)^2 - b^2 = -55 \Rightarrow \frac{576}{b^2} - b^2 = -55 \xRightarrow{\text{نضرب}\times b^2} 576 - b^4 = -55b^2$

$b^4 - 55b^2 - 576 = 0 \Rightarrow (b^2-64)(b^2+9) = 0$

$either\quad b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$ نعوض في معادلة (٢)

$a = \frac{-24}{b} \Rightarrow a = \frac{-24}{\pm 8} \Rightarrow a = \mp 3$

$or\quad b^2 + 9 = 0 \Rightarrow b^2 = -9$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $3-8i \quad , \quad -3+8i$

الآن نحل المعادلة $x^2 + (1+2i)x + 13(1+i) = 0$ باستخدام قانون الدستور حيث

$$a = 1 \quad , \quad b = (1+2i) \quad , \quad c = 13(1+i)$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{(1+2i)^2-(4)(1)(13+13i)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{1+4i+4i^2-(52+52i)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{1+4i-4-(52+52i)}}{2}=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{-55-48i}}{2}$$

$$x=\frac{-(1+2i)\mp(3-8i)}{2}$$

$$either\quad x_1=\frac{-1-2i-(3-8i)}{2}=\frac{-1-2i-3+8i}{2}=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i$$

$$or\quad x_2=\frac{-1-2i+(3-8i)}{2}=\frac{-1-2i+3-8i}{2}=\frac{2-10i}{2}=1-5i$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{-2+3i\,,1-5i\}$

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها $3-i$ ، $\frac{10}{3-i}$

الحل :

$$x_1=3-i$$

$$x_2=\frac{10}{3-i}=\frac{10}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{10(3+i)}{3^2+1^2}=\frac{10(3+i)}{10}=3+i$$

مجموع الجذرين $(3-i)+(3+i)=(3+3)+(-1+1)i=6$

ضرب الجذرين $(3-i)(3+i)=9+3i-3i-i^2=9+1=10$

$\because\ x^2-\left(\text{مجموع الجذرين}\right)x+\left(\text{حاصل ضرب الجذرين}\right)=0$

المعادلة التربيعية $\therefore\ x^2-6x+10=0$

مثال : جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $-8i$

الحل :

$$x^3=-8i\Rightarrow x^3+8i=0\Rightarrow x^3-8i\,(i^2)=0\Rightarrow x^3-8i^3=0$$

$$x^3-8i^3=(x-2i)(x^2+2xi+4i^2)=(x-2i)(x^2+2xi-4)=0$$

$$either\ (x-2i)=0\ \Rightarrow x_1=2i$$

$$or\quad x^2+2ix-4=0\ \overset{\text{بالدستور}}{\Longrightarrow}\ a=1\ ,\ b=2i\ ,\ c=-4$$

$$x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2i\pm\sqrt{4\,i^2-4\,(1)(-4)}}{2\,(1)}=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+16}}{2}$$

$$x_2=\frac{-2i\pm\sqrt{12}}{2}\Rightarrow x_2=\frac{-2i\pm2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x_2=-i\pm\sqrt{3}$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{2i\ ,\ -i+\sqrt{3}\ ,\ -i-\sqrt{3}\}$

مثال : جد الجذور التكعيبية للعدد المركب 8

الحل :

$$x^3 = 8 \Rightarrow x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$either\ (x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$or\ \ x^2+2x+4 = 0 \xrightarrow{\text{بالدستور}} a = 1\ ,\ b = 2\ ,\ c = 4$$

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{2\ ,\ -1+\sqrt{3}i\ ,\ -1-\sqrt{3}i\}$

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلةالتالية $ix^2 - 2x - 2i = 0$

الحل :

$ix^2 - 2x - 2i = 0$ (نقسم المعادلة على i)

$$\frac{ix^2}{i} - \frac{2x}{i} - \frac{2i}{i} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2\,i^4}{i}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2i^3x - 2 = 0$$

$$x^2 + 2ix - 2 = 0 \xrightarrow{\text{بالدستور}} a = 1\ ,\ b = 2i\ ,\ c = -2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+8}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-2i \pm 2}{2} = -i \pm 1$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{-i+1\ ,-i-1\}$

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة التالية $x^2 - 4sin\theta\ x + 4 = 0$

الحل :

$$x^2 - 4sin\theta\ x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{بالدستور}} a = 1\ ,\ b = -4sin\theta\ ,\ c = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-4sin\theta) \pm \sqrt{(-4sin\theta)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16(sin\theta)^2 - 16}}{2} = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16[(sin\theta)^2 - 1]}}{2}$$

$$x = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16[-(cos\theta)^2]}}{2} = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16[(cos\theta)^2 i^2]}}{2}$$

$$x=\frac{4sin\theta \pm 4cos\theta\, i}{2}=2sin\,\theta \pm 2cos\theta\, i$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{2sin\,\theta + 2cos\theta\, i \;\; , 2sin\,\theta - 2cos\theta\, i\}$

مثال : أوجد قيمة كل من x , y من المعادلة التالية $(x+yi)^2-\frac{8-8i}{1+i}+15=0$

الحل :

$$(x+yi)^2-\frac{8-8i}{1+i}+15=0 \Rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=\frac{8-8i}{1+i}-15$$

$$(x^2-y^2)+2xyi=\left(\frac{8-8i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)-15$$

$$(x^2-y^2)+2xyi=\left(\frac{8-8i-8i+8i^2}{1^2+1^2}\right)-15$$

$$(x^2-y^2)+2xyi=\left(\frac{-16i}{2}\right)-15 \Rightarrow (x^2-y^2)+2xyi=-8i-15$$

$$x^2-y^2 = -15 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2xy = -8 \Rightarrow x=\frac{-8}{2y} \Rightarrow x=\frac{-4}{y} \ldots\ldots(2)$$

$$\left(\frac{-4}{y}\right)^2-y^2 = -15 \Rightarrow \frac{16}{y^2}-y^2 = -15 \xrightarrow{\text{نضرب}\times y^2} 16-y^4=-15y^2$$

$$y^4-15y^2-16=0 \Rightarrow (y^2-16)(y^2+1)=0$$

$either \quad y^2-16=0 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4$

$$x=\frac{-4}{y}=\frac{-4}{\pm 4} \Rightarrow x=\mp 1$$

$or \quad y^2+1=0 \Rightarrow y^2=-1$ تهمل

مثال : كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذراها $(\sqrt{2}-i)^2$

$(\sqrt{2}-i)^2 = (\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}i+i^2=1-2\sqrt{2}i$ الجذر الأول

$\because$ المعاملات حقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق $1+2\sqrt{2}i$

$(1-2\sqrt{2}i)+(1+2\sqrt{2}i)=(1+1)+(-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i)=2$ المجموع

$(1-2\sqrt{2}i)(1+2\sqrt{2}i)=1+2\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i-(2\sqrt{2}i)^2=1+8=9$ الضرب

$\because \; x^2-(\text{مجموع الجذرين})\,x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\therefore \; x^2-2x+9=0$ المعادلة التربيعية

واجبات

س / أوجد قيمة كل من x , y من المعادلة التالية $(x+yi)^2=\frac{36-2i}{3+2i}$

س / جد الجذور التكعيبية للاعداد التالية $(-64\,i \;\; , \; 64 \;\; , 125 \;\; , -27i)$

س / جد الجذر التربيعي للعدد $64i$

الجذور التكعيبية للواحد صحيح

$Z^3 = 1 \implies Z^3 - 1 = 0 \implies (Z-1)(Z^2+z+1) = 0$

either $\boxed{Z = 1}$ الجذر الأول

or $z^2 + z + 1 = 0$ بالدستور $a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = 1$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2-(4)(1)(1)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

either $\boxed{z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega}$ الجذر الثاني

or $\boxed{z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega^2}$ الجذر الثالث

$\therefore$ هناك ثلاثة جذور للواحد الصحيح وهي $(1, \omega, \omega^2)$ حيث أن الرمز (ω) يقرأ أوميكا "$omega$" .

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

١) الجذران ω, ω^2 جذران تخيليان مترافقان .

٢) مجموع الجذور الثلاثة يساوي صفر اي $1 + \omega + \omega^2 = 0$

٣) حاصل ضرب الجذور الثلاثة يساوي واحد أي $\omega\omega^2 = 1$

استنتاجات لخواص الجذور :

١- مجموع اي جذرين = سالب الجذر الآخر مثلاً $\boxed{\omega + 1 = -\omega^2}$ ، $\boxed{1 + \omega^2 = -\omega}$ ، $\boxed{\omega + \omega^2 = -1}$.

٢- اي جذر = سالب (مجموع الجذرين الآخرين) مثلاً $\boxed{\omega^2 = -1 - \omega}$ ، $\boxed{1 = -\omega - \omega^2}$ ، $\boxed{\omega = -1 - \omega^2}$.

٣- $\omega^3 = 1 \implies \omega = \frac{1}{\omega^2} \implies \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

٤- كل ω هي مرافق ω^2 وبالعكس اي يمكن استبدال احدهما بالآخر كما في المثالين التاليين :

(a) $2\,\omega + 5\omega^2 = 3\omega^2 + 5\omega$

(b) $4\omega + 2\omega^2 = 4\omega^2 + 2\omega$

٥- $\boxed{\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}i}$ لاحظ

$$\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{2\sqrt{3}i}{2} = +\sqrt{3}i$$

$$\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-2\sqrt{3}i}{2} = -\sqrt{3}i$$

٦- $\omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$ لاحظ

$$\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = (\frac{-1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

٧- $\omega^{3n+r} = \omega^r$ ، $(r = 0, 1, 2, 3, \dots)$ حيث (r) عدد صحيح .

٨- نستخدم ω^3 في عمليات التبسيط .

ومن هذه الاستنتاجات نتوصل الى أن ناتج ω مرفوعة الى قوة معينة هو أحد جذور الواحد $(1,\omega,\omega^2)$

لاحظ الأمثلة التالية :

1) $\omega^4 = \omega^3 .\omega = (1).\omega = \omega$

2) $\omega^5 = \omega^3.\omega^2 = (1).\omega^2 = \omega^2$

3) $\omega^6 = (\omega^3)^2 = \omega^3.\omega^3 = (1).(1) = 1$

4) $\omega^{81} = (\omega^3)^{27} = (1)^{27} = 1$

5) $\omega^{-58} = \omega^{-58}\omega^{60} = \omega^{-58+60} = \omega^2$

6) $\omega^{-4} = \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^3.\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$

7) $\omega^{-22} = \frac{1}{\omega^{22}} = \frac{1}{(\omega^3)^7.\ \omega} = \frac{1}{(1)^7.\ \omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$

8) $\omega^{6n+5} = \omega^{6n}.\omega^5 = (\omega^3)^{2n}.\omega^5 = (1)^{2n}\omega^5 = \omega^5 = \omega^3.\omega^2 = \omega^2$

9) $\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$

LHS: $\omega^7+\omega^5+1 = (\omega^3)^2.\ \omega + \omega^3.\omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$: RHS

10) $\omega^{-6n-5} = \omega^{(-1)(6n+5)} = \omega^{-1}.\omega^{6n+5} = \frac{\omega^{6n+5}}{\omega} = \frac{(\omega^3)^{2n}.\omega^5}{\omega}$

$$\frac{1.\ \omega^3.\omega^2}{\omega} = \frac{\omega^2}{\omega} = \omega$$

11) $2+2\omega+2\omega^2 = 2(1+\omega+\omega^2) = 2(0) = 0$

12) $(2+5\omega+5\omega^2)^3 = [2+5(\omega+\omega^2)]^3 = [2-5]^3 = (-3)^3 = -27$

13) $-4(2+\omega+2\omega^2)^9 = -4[\omega+2(1+\omega^2)]^9 = -4[\omega-2\omega]^9$

$-4[(-\omega)^9] = -4(-\omega^9) = 4$

14) $(3-2\omega)^2+(3-2\omega^2)^2 = 9-12\omega+4\omega^2+9-12\omega^2+4\omega^4$

$= 9-12\omega+4\omega^2+9-12\omega^2+4\omega = 18-8\omega-8\omega^2 = 18-8(\omega+\omega^2)$

$=18+8=26$

مثال : اثبت أن

1) $(\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{1}{1+\omega})^2=-3$

LHS: $(\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{1}{1+\omega})^2=(\frac{1}{-\omega}-\frac{1}{-\omega^2})^2=(\frac{\omega^3}{-\omega}-\frac{\omega^3}{-\omega^2})^2$

$=(-\omega^2+\omega)^2=\omega^4-2\omega^3+\omega^2=\omega-2+\omega^2=-1-2=-3$: RHS

2) $(\frac{1}{2-\omega}-\frac{1}{2-\omega^2})^2=\frac{-3}{49}$

LHS : $(\frac{1}{2-\omega}-\frac{1}{2-\omega^2})^2=(\frac{(2-\omega^2)-(2-\omega)}{(2-\omega^2)(2-\omega)})^2=(\frac{2-\omega^2-2+\omega}{4-2\omega-2\omega^2+\omega^3})^2$

$=(\frac{-\omega^2+\omega}{4-2(\omega+\omega^2)+1})^2=(\frac{-\omega^2+\omega}{5+2})^2=\frac{(-\omega^2+\omega)^2}{(7)^2}=\frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{49}$

$=\frac{\omega-2+\omega^2}{49}=\frac{-1-2}{49}=\frac{-3}{49}$: RHS

3) $(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2})^2\left(2+\frac{2}{\omega}\right)\left(\frac{-1}{1+\omega^2}\right)=6$

LHS : $(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2})^2\left(2+\frac{2}{\omega}\right)\left(\frac{-1}{1+\omega^2}\right)=(\frac{\omega^3}{\omega}-\frac{\omega^3}{\omega^2})^2\left(2+\frac{2\omega^3}{\omega}\right)\left(\frac{-\omega^3}{-\omega}\right)$

$=(\omega^2-\omega)^2(2+2\omega^2)(\omega^2)=(\omega^4-2\omega^3+\omega^2)(2)(1+\omega^2)(\omega^2)$

$=(\omega-2+\omega^2)(2)(-\omega)(\omega^2)=(-1-2)(-2\omega^3)=(-3)(-2)=6$: RHS

4) $\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\frac{2}{3}$

LHS : $\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\frac{(\omega^3)^4\omega^2+(\omega^3)^2.\omega-1}{(\omega^3)^3.\omega+\omega^3\omega^2-2}=\frac{\omega^2+\omega-1}{\omega+\omega^2-2}=\frac{-1-1}{-1-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$: RHS

5) $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=18$: RHS

LHS : $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=\left(1-\frac{2\omega^3}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5\omega^3}{\omega}\right)$

$=(1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-5\omega^2)=(1+\omega^2-2\omega)(1+\omega-5\omega^2)$

$=(-\omega-2\omega)(-\omega^2-5\omega^2)=(-3\omega)(-6\omega^2)=18\omega^3=18$: RHS

6) $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3=-2$

LHS : $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3=(-\omega)^3+(-\omega^2)^3=(-\omega)^3+(-\omega^3)^2=-\omega^3-(\omega^3)^2$

$=-1-1=-2$: RHS

7) $\frac{\omega}{(2+5\omega+2\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(2+2\omega+5\omega^2)^2}=-\frac{1}{9}$

LHS : $\frac{\omega}{[2(1+\omega^2)+5\omega]^2}+\frac{\omega^2}{[2(1+\omega)+5\omega^2]^2}=\frac{\omega}{[-2\omega+5\omega]^2}+\frac{\omega^2}{[-2\omega^2+5\omega^2]^2}$

$=\frac{\omega}{[3\omega]^2}+\frac{\omega^2}{[3\omega^2]^2}=\frac{\omega}{9\omega^2}+\frac{\omega^2}{9\omega^4}=\frac{\omega}{9\omega^2}+\frac{1}{9\omega^2}=\frac{\omega+1}{9\omega^2}=\frac{-\omega^2}{9\omega^2}=-\frac{1}{9}$: RHS

مثال : اذا كان $(x+yi)=(1+2\omega+\frac{1}{\omega})^2$ اثبت ان $x^2+y^2=1$

الحل :

$(1+2\omega+\frac{1}{\omega})^2=(1+2\omega+\frac{\omega^3}{\omega})^2=(1+2\omega+\omega^2)^2=(-\omega+2\omega)^2=\omega^2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x^2+y^2=(\frac{-1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$

مثال : جد بابسط صورة :

1) $\omega(1+i)^4-(5+3\omega+5\omega^2)^2$ (وزاري ٢٠٠٩)

$\omega(1+i)^4-(5+3\omega+5\omega^2)^2=\omega[(1+i)^2]^2-[3\omega+5(1+\omega^2)]^2$

$=\omega(1+2i+i^2)^2-(3\omega-5\omega)^2=\omega(2i)^2-(-2\omega)^2$

$=-4\omega-4\omega^2=-4(\omega+\omega^2)=-4(-1)=4$

2) $\frac{5\omega+3}{3\omega^2+5}=(\frac{5\omega+3\omega^3}{3\omega^2+5})^3=(\frac{\omega(5+3\omega^2)}{3\omega^2+5})^3=\omega^3=1$

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $(3+5\omega+4\omega^2)^6$, $(4+5\omega+5\omega^2)^2$

الحل :

$h=(4+5\omega+5\omega^2)^2=[4+5(\omega+\omega^2)]^2=(4-5)^2=(-1)^2=1$

$k=(3+5\omega+4\omega^2)^6=[3+5\omega+4(-1-\omega)]^6=[3+5\omega-4-4\omega]^6=[-1+\omega]^6$

$k=[(-1+\omega)^2]^3=(1-2\omega+\omega^2)^3=(1+\omega^2-2\omega)^3=(-\omega-2\omega)^3=(-3\omega)^3=-27$

$(h+k)=(1)+(-27)=-26$

$(h.k)=(1)(-27)=-27$

$x^2-(-26)x-27=0 \Rightarrow x^2+26x-27=0$ المعادلة التربيعية

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $\left(\frac{2}{\omega^2}+3\omega^2 i\right), \left(\frac{2}{\omega}+3\omega i\right)$

الحل :

$$h=\left(\frac{2}{\omega}+3\omega i\right)=\left(\frac{2\omega^3}{\omega}+3\omega i\right)=(2\omega^2+3\omega i)$$

$$k=\left(\frac{2}{\omega^2}+3\omega^2 i\right)=\left(\frac{2\omega^3}{\omega^2}+3\omega^2 i\right)=(2\omega+3\omega^2 i)$$

$$(h+k)=(2\omega^2+3\omega i)+(2\omega+3\omega^2 i)=2(\omega^2+\omega)+3(\omega+\omega^2)i=-2-3i$$

$$h.k=(2\omega^2+3\omega i)(2\omega+3\omega^2 i)=(4\omega^3-9\omega^3)+(6\omega^4+6\omega^2)i$$

$$h.k=(4-9)+6(\omega+\omega^2)i=-5-6i$$

$$x^2-(-2-3i)x+(-5-6i)=0$$ المعادلة التربيعية

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $h=1-\omega^2 i \;,\; k=1-\omega i$

الحل :

$$h+k=(1-\omega^2 i)+(1-\omega i)=(1+1)+(-\omega^2-\omega)i=2+i$$

$$h.k=(1-\omega^2 i)(1-\omega i)=(1-\omega^3)+(-\omega^2-\omega)i=i$$

$$x^2-(2+i)x+i=0$$ المعادلة التربيعية

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $\left(\frac{3i}{\omega^2}-\frac{2\omega^2}{i}\right), \left(\frac{3i}{\omega}-\frac{2\omega}{i}\right)$

$$h=\left(\frac{3i}{\omega}-\frac{2\omega}{i}\right)=\left(\frac{3\omega^3 i}{\omega}-\frac{2\omega}{i}.\frac{-i}{-i}\right)=(3\omega^2 i+2\omega i)=(3\omega^2+2\omega)i$$

$$k=\left(\frac{3i}{\omega^2}-\frac{2\omega^2}{i}\right)=\left(\frac{3\omega^3 i}{\omega^2}-\frac{2\omega^2}{i}.\frac{-i}{-i}\right)=(3\omega i+2\omega^2 i)=(3\omega+2\omega^2)i$$

$$h+k=(3\omega^2+2\omega)i+(3\omega+2\omega^2)i=(5\omega^2+5\omega)i=5(\omega^2+\omega)i=-5i$$

$$h.k=(3\omega^2+2\omega)i.(3\omega+2\omega^2)i=-(9\omega^3+6\omega^4+6\omega^2+4\omega^3)$$

$$h.k=-[(13)+6(\omega+\omega^2)]=-(13-6)=-7$$

$$x^2-(-5i)x+(-7)=0$$ المعادلة التربيعية

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{2}{1-\omega} \;,\; \frac{2}{1-\omega^2}$

الحل : $k=\frac{2}{1-\omega} \quad , \quad h=\frac{2}{1-\omega^2}$

$$h+k=\frac{2}{1-\omega^2}+\frac{2}{1-\omega}=\frac{2(1-\omega)+2(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)(1-\omega)}$$

$$h+k=\frac{2-2\omega+2-2\omega^2}{1-\omega-\omega^2+\omega^3}=\frac{4-2(\omega+\omega^2)}{2-\omega-\omega^2}=\frac{4+2}{2+1}=\frac{6}{3}=2$$

$$h.k=\left(\frac{2}{1-\omega^2}\right)\left(\frac{2}{1-\omega}\right)=\frac{4}{1-\omega-\omega^2+\omega^3}=\frac{4}{3}$$

$x^2-2x+\frac{4}{3}=0$ المعادلة التربيعية

مثال : أوجد قيمة كل مما يأتي :

1) $\left(\frac{1}{3+4\omega+5\omega^2}-\frac{1}{3+5\omega+4\omega^2}\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{3+4(-1-\omega^2)+5\omega^2}-\frac{1}{3+5(-1-\omega^2)+4\omega^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{3-4-4\omega^2+5\omega^2}-\frac{1}{3-5-5\omega^2+4\omega^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{-1+\omega^2}-\frac{1}{-2-\omega^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-2-\omega^2-(-1+\omega^2)}{(-1+\omega^2)(-2-\omega^2)}\right)^2=\left(\frac{-2+1-\omega^2-\omega^2}{2+\omega^2-2\omega^2-\omega^4}\right)^2=\left(\frac{-1-2\omega^2}{2+(-\omega^2-\omega)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-1-2\omega^2}{2+1}\right)^2=\left(\frac{-1-2\omega^2}{3}\right)^2=\frac{1+4\omega^2+4\omega^4}{9}=\frac{1+4\omega^2(1+\omega^2)}{9}$$

$$=\frac{1+4\omega^2(-\omega)}{9}=\frac{1-4\omega^3}{9}=\frac{1-4}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$$

2) $\left(\sqrt{1+\omega^{13}}+\sqrt{1+\omega^{14}}\right)^2$

$$=\left(\sqrt{1+\omega}+\sqrt{1+\omega^2}\right)^2=\left(\sqrt{-\omega^2}+\sqrt{-\omega}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\omega^2}i+\sqrt{\omega}i\right)^2=(\omega i+\omega^2 i)^2=\left(i(\omega+\omega^2)\right)^2=(-i)^2$$

$$=i^2=-1$$

3) $\frac{1-\omega^2+\omega}{1+i+\omega+\omega i}$

$$=\frac{1+\omega-\omega^2}{1+i+\omega(1+i)}=\frac{-\omega^2-\omega^2}{(1+i)(-\omega^2)}=\frac{-2\omega^2}{(1+i)(-\omega^2)}$$

$$= \frac{2}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2\,(1-i)}{2} = 1-i$$

4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega} + 3\sqrt{2}\,\omega + \sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{1}{\omega} + 4\omega + 1\right)$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\omega^3}{\omega} + 3\sqrt{2}\,\omega + \sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{\omega^3}{\omega} + 4\omega + 1\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\omega^2 + 3\sqrt{2}\,\omega + \sqrt{2}\right)^2 (\omega^2 + 4\omega + 1)$$

$$= [\sqrt{2}(\omega^2 + 3\,\omega + 1)]^2 (\omega^2 + 4\omega + 1)$$

$$= (\sqrt{2}[(\omega^2+1) + 3\omega])^2 (\omega^2 + 1 + 4\omega) = \left(\sqrt{2}[(-\omega) + 3\omega]\right)^2 (-\omega + 4\omega)$$

$$= \left(\sqrt{2}(2\omega)\right)^2 (3\omega) = (8\omega^2)(3\omega) = 24\,\omega^3 = 24$$

5) اذا كان $a = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)$ فإثبت أن $(a^{12} + a^{22} + a^{23} = 0)$ وكذلك $(a^9 . a^{16} . a^{32} = 1)$

$$\because \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} = \omega$$

$$a^{12} + a^{22} + a^{23} = \omega^{12} + \omega^{22} + \omega^{23} = (\omega^3)^4 + (\omega^3)^7\omega + (\omega^3)^7\,\omega^2 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$a^9 . a^{16} . a^{32} = \omega^9 . \omega^{16} . \omega^{32} = 1 . \omega . \omega^2 = \omega^3 = 1$$

مثال : برهن أن $\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} + \frac{2+\omega^2}{\omega^4}} = i$

الحل :

$$\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} + \frac{2+\omega^2}{\omega^4}} = \sqrt{\frac{1}{-\omega} + \frac{2+\omega^2}{\omega}} = \sqrt{\frac{1-(2+\omega^2)}{-\omega}} = \sqrt{\frac{-1-\omega^2}{-\omega}} = \sqrt{\frac{\omega}{-\omega}} = \sqrt{-1} = i$$

مثال : برهن أن $(\omega - \omega^2)^8 = 81$

الحل :

$$(\omega - \omega^2)^8 = [(\omega - \omega^2)^2]^4 = [\omega^2 - 2\omega . \omega^2 + \omega^4]^4 = [\omega^2 + \omega^4 - 2]^4 = [-1-2]^4$$
$$= [-3]^4 = [(-3)^2]^2 = [9]^2 = 81$$

مثال : برهن أن $(1+\omega^4)^3 + (1-\omega^7-\omega^8)^3 = 7$

الحل :

$$(1+\omega^4)^3 + (1-\omega^7-\omega^8)^3 = (1+\omega)^3 + (1-\omega-\omega^2)^3 = (-\omega^2)^3 + \left(1-(\omega+\omega^2)\right)^3$$
$$= (-\omega^6) + \left(1-(-1)\right)^3 = -1 + (2)^3 = -1 + 8 = 7$$

مثال : أوجد الناتج $\left(\frac{1}{\omega^4}-\frac{1}{\omega^2}\right)\left(2\omega^6+\frac{2}{\omega}\right)\left(\frac{-\omega^6}{1+\omega^5}\right)$

الحل :

$$\left(\frac{1}{\omega^4}-\frac{1}{\omega^2}\right)\left(2\omega^6+\frac{2}{\omega}\right)\left(\frac{-\omega^6}{1+\omega^5}\right)=\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}\right)\left(2+\frac{2}{\omega}\right)\left(\frac{-1}{1+\omega^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\omega^3}{\omega}-\frac{\omega^3}{\omega^2}\right)\left(2+\frac{2\omega^3}{\omega}\right)\left(\frac{-1}{-\omega}\right)=(\omega^2-\omega)(2+2\omega^2)\left(\frac{\omega^3}{\omega}\right)$$

$$=(\omega^2-\omega)(2+2\omega^2)(\omega^2)=(\omega^2-\omega)[2(\omega^2)+2\omega^2(\omega^2)]=(\omega^2-\omega)[2\omega^2+2\omega]$$

$$=(\omega^2-\omega)[2(\omega^2+\omega)]=(\omega^2-\omega)[2(-1)]=-2(\pm\sqrt{3}i)=\mp2\sqrt{3}i$$

مثال : جد ناتج $x\,,y$ والتي تحقق المعادلة التالية : $x+yi=\frac{-8}{\omega^2}$

الحل : يحل بطريقتين

الطريقة الأولى :

$$x+yi=\frac{-8}{\omega^2}=-8\omega=-8\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)=4-4\sqrt{3}i$$

$$x+yi=4-4\sqrt{3}i\Rightarrow\boxed{x=4\quad,\quad y=-4\sqrt{3}}$$

الطريقة الثانية :

$$x+yi=\frac{-8}{\omega^2}=\frac{-8}{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}}=\frac{-8}{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}}\times\frac{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}}{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}}=\frac{4-4\sqrt{3}i}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$x+yi=\frac{4-4\sqrt{3}i}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{4-4\sqrt{3}i}{1}=4-4\sqrt{3}i\Rightarrow x+yi=4-4\sqrt{3}i$$

$$\boxed{x=4\quad,\quad y=-4\sqrt{3}}$$

طريقة حل المسائل التي تحتوي على ω فهناك بعض الطرق الاساسية التي تستخدم في تبسيط حل المسائل وهي كالاتي :

الطريقة الأولى : ايجاد العامل المشترك

مثال : جد قيمة ما يأتي :

a) $\sqrt{\frac{2+11\omega+11\omega^2}{2-5\omega-5\omega^2}}=\sqrt{\frac{2+11(\omega+\omega^2)}{2-5(\omega+\omega^2)}}=\sqrt{\frac{2-11}{2+5}}=\sqrt{\frac{-9}{7}}=\frac{3i}{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt{\frac{1+10\omega+10\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}}=\sqrt{\frac{1+10(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)}}=\sqrt{\frac{1-10}{1+3}}=\sqrt{\frac{-9}{4}}=\frac{3i}{2}$

مثال : جد قيم $x\,,y$ التي تحقق المعادلة :

الحل :

$$x+yi=\left(\sqrt{1+\omega^{32}}+\sqrt{1+\omega^{61}}\right)^2-\frac{3+i}{1+i}$$

$$x+yi=\left(\sqrt{1+\omega^{32}}+\sqrt{1+\omega^{61}}\right)^2-\frac{3+i}{1+i}=\left(\sqrt{1+\omega^2}+\sqrt{1+\omega}\right)^2-\frac{3+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$$

$$x+yi=\left(\sqrt{-\omega}+\sqrt{-\omega^2}\right)^2-\frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2}=\left(\sqrt{-\omega\omega^3}+i\omega\right)^2-\frac{4-2i}{2}$$

$$x+yi=\left(\sqrt{-\omega^4}+i\omega\right)^2-\frac{4}{2}-\frac{2i}{2}=(i\omega^2+i\omega)^2-\frac{4-2i}{2}=[i(\omega^2+\omega)]^2-(2-i)$$

$$x+yi=[i(-1)]^2-(2-i)=-1-(2-i)=\ -3+i$$

$$x=\ -3\quad ,\quad y=1$$

مثال : جد قيم $x\,,y$ التي تحقق المعادلة :

الحل :

$$x\omega+y\omega i=\left(\frac{i\omega^2+i}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x\omega+y\omega i=\left(\frac{i\omega^2+i}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega(x+yi)=\left(\frac{i(\omega^2+1)}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\omega(x+yi)=\left(\frac{i(-\omega)}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{-i}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega(x+yi)=\left(\frac{-i(\omega^3)}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\omega(x+yi)=\ (-i\omega^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-i\omega^2}\Rightarrow\omega(x+yi)=\omega\sqrt{-i}$$

$(x+yi)=\sqrt{-i}$ بالتربيع للطرفين

$(x+yi)^2=-i$

$x^2+2xyi-y^2=0-i\Rightarrow x^2-y^2+2xyi=0-i$

$x^2-y^2=0\ \ \ldots\ldots(1)$

$2xy=-1\ \ \ldots\ldots\ldots(2)$

$y\ =\frac{-1}{2x}\ \ \ldots\ldots\ldots(*)$ نعوض معادلة $(*)$ في (١)

$$x^2-\frac{1}{4x^2}=0\xrightarrow{4x^2\times\text{نضرب}}4x^2-1=0\Rightarrow(2x^2-1)(2x^2+1)=0$$

$$either\ 2x^2-1=0\Rightarrow\ x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow y=\frac{-1}{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$or\quad 2x^2+1=0\Rightarrow 2x^2=-1$ يهمل

$\therefore$ الجذران هما $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i}$, $\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}$

مثال : جد قيمة الآتي : $(1-i)^4-(5+3\omega+5\omega^2)^3$

الحل :

$$(1-i)^4-(5+3\omega+5\omega^2)^3 = [(1-i)^2]^2-\big(5+3\omega+5(-1-\omega)\big)^3$$
$$[1-2i+i^2]^2-(5+3\omega-5-5\omega)^3=[-2i]^2-(-2\omega)^3=4i^2+8\omega^3=-4+8=4$$

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(2\omega+2\omega^2-1)^2 \quad , \quad (2-2\omega-2\omega^2)^2$

الجذر الأول $(2\omega+2\omega^2-1)^2=(2\omega+2(-1-\omega)-1)^2=(2\omega-2-2\omega-1)^2=(-3)^2=9$

الجذر الثاني $(2-2\omega-2\omega^2)^2=\big(2-2\omega-2(-1-\omega)\big)^2=(2-2\omega+2+2\omega)^2=(4)^2=16$

مجموع الجذرين $9+16=25$

ضرب الجذرين $(9).(16)=144$

$\because\ x^2-$ (مجموع الجذرين) $x+$ حاصل ضرب الجذرين $=0$

المعادلة التربيعية $\therefore\ x^2-25x+144=0$

الطريقة الثانية : طريقة الاستبدال

مثال : جد ناتج $(3+2\omega+4\omega^2)^2$

$$(3+2\omega+4\omega^2)^2=[3+2\omega+4(-1-\omega)]^2=(3+2\omega-4-4\omega)^2$$
$$=(-1-2\omega)^2=1+4\omega+4\omega^2=1+4(\omega+\omega^2)=1-4=-3$$

الطريقة الثالثة : معاملات البسط والمقام متساوية

مثال : جد ناتج $\frac{10\omega+3}{3\omega^2+10}$

$$\frac{10\omega+3}{3\omega^2+10}=\frac{10\omega+3\omega^3}{3\omega^2+10}=\frac{\omega(10+3\omega^2)}{3\omega^2+10}=\omega$$

مثال : اثبت أن $\left(\frac{a-b\omega^2}{a\omega-b}-\frac{d-c\omega}{d\omega^2-c}\right)^4=9$

$$\left(\frac{a-b\omega^2}{a\omega-b}-\frac{d-c\omega}{d\omega^2-c}\right)^4=\left(\frac{a-b\omega^2}{a\omega-b\omega^3}-\frac{d\omega^3-c\omega}{d\omega^2-c}\right)^4$$
$$=\left(\frac{a-b\omega^2}{\omega(a-b\omega^2)}-\frac{\omega(d\omega^2-c)}{d\omega^2-c}\right)^4=\left(\frac{1}{\omega}-\omega\right)^4=(\omega^2-\omega)^4=(\pm\sqrt{3}i)^4$$
$$=[(\pm\sqrt{3}i)^2]^2=(3i^2)^2=(-3)^2=9$$

الطريقة الرابعة : ايجاد المضاعف المشترك

مثال : اثبت أن $\left(\frac{5}{3-\omega}-\frac{5}{3-\omega^2}\right)^2=\frac{-75}{169}$

الحل :

$$\left(\frac{5}{3-\omega}-\frac{5}{3-\omega^2}\right)^2=25\left(\frac{1}{3-\omega}-\frac{1}{3-\omega^2}\right)^2=(25)\left(\frac{(3-\omega^2)-(3-\omega)}{(3-\omega)(3-\omega^2)}\right)^2$$
$$=(25)\left(\frac{3-\omega^2-3+\omega}{9-3\omega^2-3\omega+\omega^3}\right)^2=(25)\left(\frac{-\omega^2+\omega}{10-3\omega^2-3\omega}\right)^2$$

$$= (25)\left(\frac{-\omega^2+\omega}{10+3(-\omega^2-\omega)}\right)^2 = (25)\left(\frac{-\omega^2+\omega}{10+3(1)}\right)^2 = (25)\left(\frac{-\omega^2+\omega}{13}\right)^2$$

$$= (25)\left(\frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{169}\right) = (25)\left(\frac{\omega^4+\omega^2-2}{169}\right) = (25)\left(\frac{(\omega^4+\omega^2)-2}{169}\right)$$

$$= (25)\left(\frac{(\omega+\omega^2)-2}{169}\right) = (25)\left(\frac{(-1)-2}{169}\right) = (25)\left(\frac{-3}{169}\right) = \frac{-75}{169}$$

مثال : جد قيمة x $\quad 4^x - 2^{x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} - 2^{x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{1}{2} = 0$

الحل :

$$4^x - 2^{x+\omega} - 2^{x+\omega^2} + 2^{-1} = 0$$

$$([2]^2)^x - 2^{x+\omega} - 2^{x+\omega^2} + 2^{\omega+\omega^2} = 0$$ نجزأ الاسس

$$2^{2x} - 2^x 2^\omega - 2^x 2^{\omega^2} + 2^\omega 2^{\omega^2} = 0$$

$$2^x(2^x - 2^\omega) - 2^{\omega^2}(2^x - 2^\omega) = 0$$

$$(2^x - 2^\omega)\left(2^x - 2^{\omega^2}\right) = 0$$

$$either\ (2^x - 2^\omega) = 0 \Rightarrow 2^x = 2^\omega \Rightarrow x = \omega$$

$$or\quad \left(2^x - 2^{\omega^2}\right) = 0 \Rightarrow 2^x = 2^{\omega^2} \Rightarrow x = \omega^2$$

حل تمارين (1 – 3)

س 1/ أكتب المقادير الاتية بأبسط صورة :

a) $\omega^{64} = (\omega^3)^{21}.\omega = 1.\omega = \omega$

b) $\omega^{-325} = \frac{1}{\omega^{325}} = \frac{1}{(\omega^3)^{108}.\ \omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$

c) $\frac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}} = \frac{1}{(1+\omega^{-32}.\ \omega^{33})^{12}} = \frac{1}{(1+\omega)^{12}} = \frac{1}{(-\omega^2)^{12}} = \frac{1}{\omega^{24}} = \frac{1}{(\omega^3)^8} = \frac{1}{(1)^8} = 1$

d) $(1+\omega^2)^{-4} = \frac{1}{(1+\omega^2)^4} = \frac{1}{(-\omega)^4} = \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^3.\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$

e) $\omega^{9n+5} = \omega^{9n}.\omega^5 = (\omega^3)^{3n}.\omega^5 = (1)\omega^2 = \omega^2$

س 2/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها

a) $1+\omega \ ,\ 1+\omega^2$

مجموع الجذرين $\quad (1+\omega)+(1+\omega^2) = 2+\omega+\omega^2 = 2-1 = 1$

حاصل الضرب $\quad (1+\omega)(1+\omega^2) = 1+\omega+\omega^2+\omega^3 = 1-1+1 = 1$

$\because \quad x^2 - \left(\text{مجموع الجذرين}\right)x + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0$

$\therefore \quad x^2 - x + 1 = 0$ المعادلة التربيعية

b) $\frac{\omega}{2-\omega^2} \quad , \quad \frac{\omega^2}{2-\omega}$

$$\frac{\omega}{2-\omega^2} + \frac{\omega^2}{2-\omega} = \frac{\omega\,(2-\omega) + \omega^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$$ مجموع الجذرين

$$= \frac{2\omega - \omega^2 + 2\omega^2 - \omega^4}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + \omega^3} = \frac{2\omega + \omega^2 - \omega}{5 - 2(\omega + \omega^2)} = \frac{\omega + \omega^2}{5 - 2(-1)} = \frac{-1}{7}$$

$$\frac{\omega}{2-\omega^2} \times \frac{\omega^2}{2-\omega} = \frac{\omega^3}{(2-\omega^2)(2-\omega)} = \frac{1}{7}$$ ضرب الجذرين

$\because \quad x^2 - \left(\text{مجموع الجذرين}\right)x + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0$

$\therefore \quad x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{7} = 0$ المعادلة التربيعية

c) $\frac{3i}{\omega^2} \quad , \quad \frac{-3\omega^2}{i}$ وزاري ٢٠١٥ ، وزاري ٢٠١٤ / د٣ ، وزاري ٢٠١١ / د٢

$$\frac{3i}{\omega^2} + \frac{-3\omega^2}{i} = \frac{3i}{\omega^2}\,\omega^3 + \frac{-3\omega^2}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = 3\omega i + 3\omega^2 i = 3i\,(\omega + \omega^2) = 3i\,(-1) = -3i$$

$$\frac{3i}{\omega^2} \times \frac{-3\omega^2}{i} = \frac{3i}{\omega^2}\,\omega^3 \times \frac{-3\omega^2}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = 3\omega i \times 3\omega^2 i = 9\omega^3 i^2 = -9$$

$\because \quad x^2 - \left(\text{مجموع الجذرين}\right)x + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0$

$\therefore \quad x^2 - (-3i)x + (-9) = 0 \Rightarrow x^2 + 3ix - 9 = 0$ المعادلة التربيعية

س3/ اذا كان $z^2 + z + 1 = 0$ فجد القيمة : $\frac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$

الطريقة الأولى :

$z^2 + z + 1 = 0$

$z^2 + z + \omega^3 = 0$

$(z - \omega)(z - \omega^2) = 0$

$either \quad z = \omega$

$or \quad z = \omega^2$

الطريقة الثانية : يحل بالدستور

$z^2 + z + 1 = 0$ بالدستور $\quad a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = 1$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - (4)(1)(1)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

either $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega$ الجذر الأول

or $z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega^2$ الجذر الثاني

عندما $z = \omega$

$$\frac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^7-3\omega^8} = \frac{1+3(\omega^3)^3\omega+3(\omega^3)^3.\omega^2}{1-3(\omega^3)^2\omega-3(\omega^3)^2.\omega^2} = \frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2} = \frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)} = \frac{1-3}{1-3(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

عندما $z = \omega^2$

$$= \frac{1+3(\omega^2)^{10}+3(\omega^2)^{11}}{1-3(\omega^2)^7-3(\omega^2)^8} = \frac{1+3\omega^{20}+3\omega^{22}}{1-3\omega^{14}-3\omega^{16}} = \frac{1+3\omega^2+3\omega}{1-3\omega^2-3\omega}$$

$$= \frac{1+3(\omega^2+\omega)}{1-3(\omega^2+\omega)} = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

س 4/ اثبت أن : وزاري ٢٠١١ / د١ ، وزاري ٢٠١٥ / د١

a) $(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2})^2 = \frac{-1}{3}$

$$LHS: \left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2}\right)^2 = \left(\frac{2+\omega^2-(2+\omega)}{(2+\omega)(2+\omega^2)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2+\omega^2-2-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+\omega^3}\right)^2 = \left(\frac{\omega^2-\omega}{5-2(\omega^2+\omega)}\right)^2 = \frac{(\omega^2-\omega)^2}{(5-2)^2}$$

$$= \frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{3^2} = \frac{\omega+\omega^2-2}{9} = \frac{-1-2}{9} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

b) $\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2} = \frac{2}{3}$

$$LHS: \frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2} = \frac{(\omega^3)^4.\omega^2+(\omega^3)^2\omega-1}{(\omega^3)^3\omega+\omega^3\omega^2-2} = \frac{\omega^2+\omega-1}{\omega+\omega^2-2} = \frac{-1-1}{-1-2}$$

$$= \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} : RHS$$

c) $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right) = 18$ وزاري ٢٠١٤ / د١

$$LHS: \left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right) = \left(1-\frac{2\omega^3}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5\omega^3}{\omega}\right)$$

$$= (1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-5\omega^2) = (1-2\omega+(-1-\omega))(-\omega^2-5\omega^2)$$

$= (-3\omega)(-6\omega^2) = 18\omega^3 = 18$

d) $(1+\omega^2)^3 + (1+\omega)^3 = -2$

$LHS : (1+\omega^2)^3 + (1+\omega)^3 = (-\omega)^3 + (-\omega^2)^3 = -\omega^3 - \omega^6 = -1 - 1 = -2$

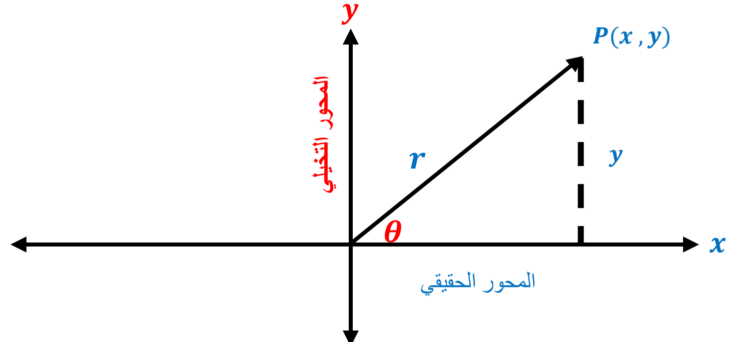
واجبات

1) $(5 + \omega).\left(\frac{1}{5+4\omega+3\omega^2} - \frac{1}{3\omega+2\omega^2}\right)$ ج : 4

2) $\sqrt{\frac{1+10\omega+10\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}}$ ج : $\frac{3i}{2}$

التمثيل الهندسي للاعداد المركبة

العدد المركب $(x + yi)$ يمكن تمثيله هندسيا بالنقطة (x , y) حيث يسمى المحور $(x - axis)$ بالمحور الحقيقي وهو يمثل الجزء الحقيقي للعدد المركب أما المحور $(y - axis)$ فيسمى المحور التخيلي وهو يمثل الجزء التخيلي للعدد المركب ، ويمكن تمثيل بعض العمليات التي تجري على الاعداد المركبة تمثيلاً هندسيا وتسمى الاشكال الناتجة باشكال (أرجاند) ويسمى المستوي الذي يحتويها بالمستوى المركب وسنرمز لها بالرمز $P\ (x , y)$.

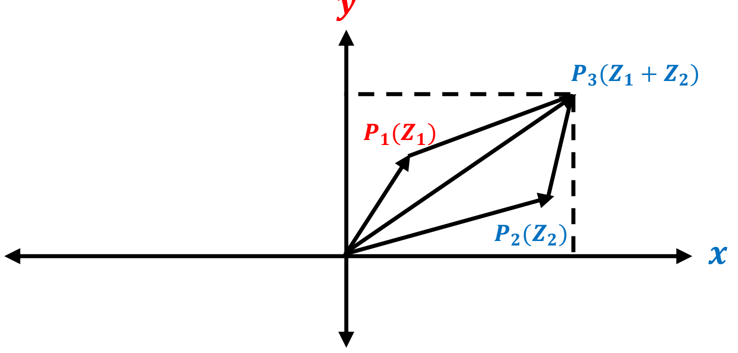


اذا كان $z_1 = x_1 + y_1 i$ ، $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $P_1(x_1 , y_1)$ $P_2(x_2 , y_2)$ فأن :

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

ويمكن تمثيل $z_1 + z_2$ بالنقطة $P_3 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ وذلك باستخدام المعلومات المتعلقة بالمتجهات وكما موضح بالشكل :

اي أن : $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_3}$



مثال : مثل العمليات الاتية هندسيا في شكل (ارجاند)

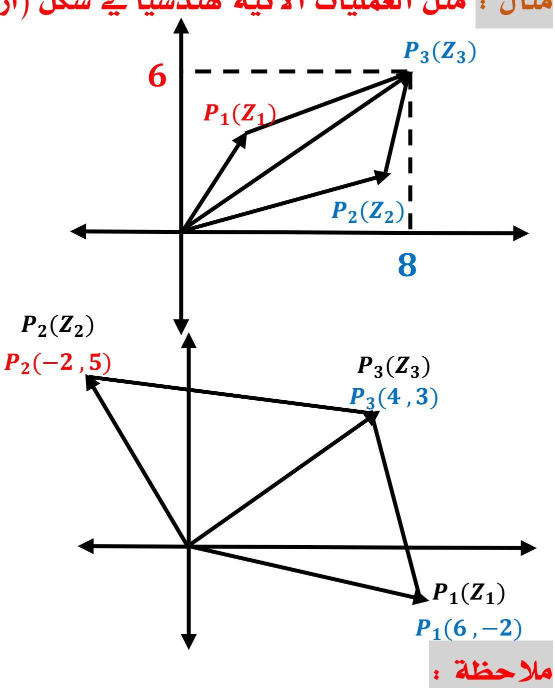
a) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$

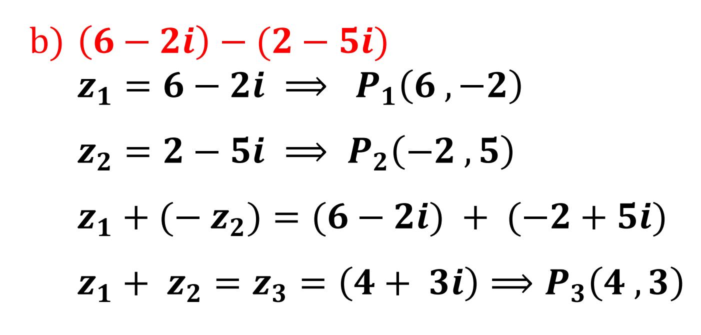
$z_1 = 3 + 4i \Rightarrow P_1(3,4)$

$z_2 = 5 + 2i \Rightarrow P_2(5,2)$

$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (5 + 2i)$

$z_1 + z_2 = z_3 = (8 + 6i) \Rightarrow P_3(8,6)$





b) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$

$z_1 = 6 - 2i \Rightarrow P_1(6,-2)$

$z_2 = 2 - 5i \Rightarrow P_2(-2,5)$

$z_1 + (-z_2) = (6 - 2i) + (-2 + 5i)$

$z_1 + z_2 = z_3 = (4 + 3i) \Rightarrow P_3(4,3)$

ملاحظة :

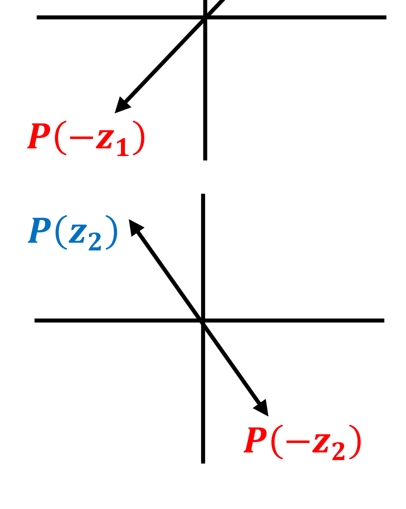
- العدد Z نظيره $-Z$ يعني اذا كانت $Z = 1 + 2i$ فإن $-Z = -1 - 2i$
- للعدد Z المرافق هو $\overline{Z}$ ويقصد به تغيير اشارة الوسط فقط $Z = 1 + 2i$, $\overline{Z} = 1 - 2i$

حل تمارين (4 – 1)

س1/ أكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الآتية ثم مثل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل أرجاند :

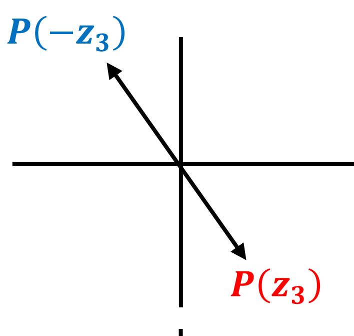
العدد	النظير
$z_1 = 2 + 3i$	$-z_1 = -2 - 3i$
$P_1 = (2,3)$	$-P_1 = (-2,-3)$
$z_2 = -1 + 3i$	$-z_2 = 1 - 3i$
$P_2 = (-1,3)$	$-P_2 = (1,-3)$

التمثيل البياني



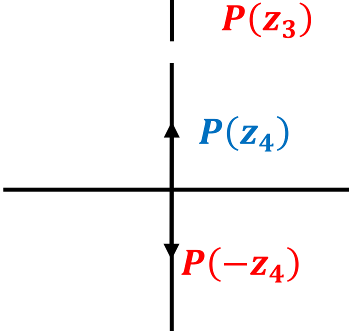
$z_3 = 1 - i$ $\quad$ $-z_3 = -1 + i$

$P_3 = (1, -1)$ $\quad$ $P_3 = (-1, 1)$



$z_4 = i$ $\quad$ $-z_4 = -i$

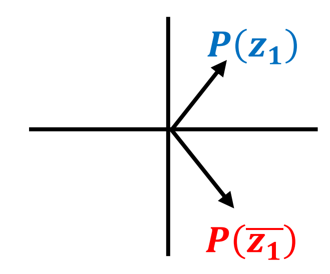
$P_4 = (0, 1)$ $\quad$ $P_4 = (0, -1)$

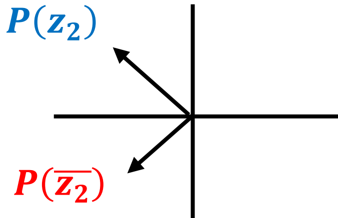


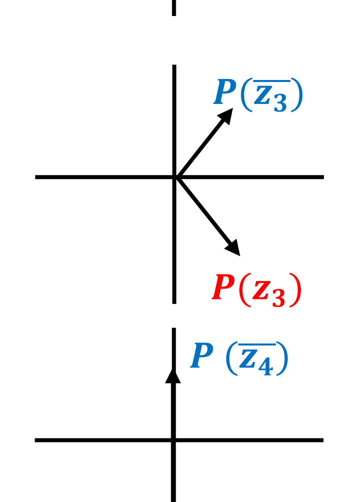
س 2 / أكتب العدد المرافق لكل من الاعداد الاتية ثم مثل الاعداد ومرافقاتها على شكل أرجاند :



العدد	مرافق العدد
$z_1 = 5 + 3i$	$\overline{z_1} = 5 - 3i$
$P_1(z_1) = (5, 3)$	$P_1(\overline{z_1}) = (5, -3)$
$z_2 = -3 + 2i$	$\overline{z_2} = -3 - 2i$
$P_2(z_2) = (-3, 2)$	$P_2(\overline{z_2}) = (-3, -2)$
$z_3 = 1 - i$	$\overline{z_3} = 1 + i$
$P_3(z_3) = (1, -1)$	$P_3(\overline{z_3}) = (1, 1)$
$z_4 = -2i$	$\overline{z_4} = 2i$
$P(z_4) = (0, -2)$	$P(\overline{z_4}) = (0, 2)$

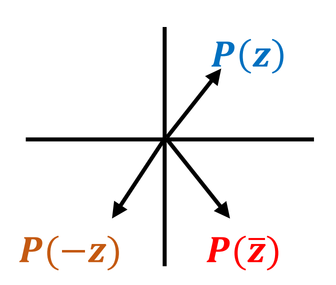






س3 / اذا كانت $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من $\bar{z}$, $z , -z$

$z = 4 + 2i$	$P(z) = (4 , 2)$
$\bar{z} = 4 - 2i$	$P(\bar{z}) = (4 , -2)$
$-z = -4 - 2i$	$P(-z) = (-4 , -2)$

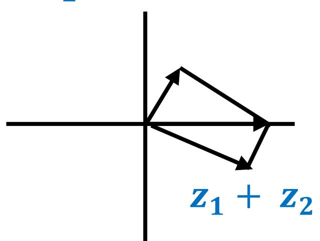


س 4 / اذا كان $z_1 = 4 - 2i$ ، $z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$-3z_2$, $2z_1$, $z_1 - z_2$, $z_1 + z_2$

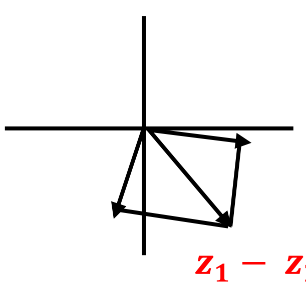
$z_1 + z_2 = (4 - 2i) + (1 + 2i) = 5 + 0i$

$z_1 + z_2 = Z_3 = 5 + 0i \Rightarrow P(Z_3) = (5 , 0)$



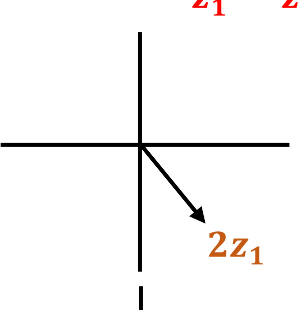
$z_1 - z_2 = (4 - 2i) - (1 + 2i) = 3 - 4i$

$z_1 - z_2 = z_3 = 3 - 4i \Rightarrow P(Z_3) = (3 , -4)$



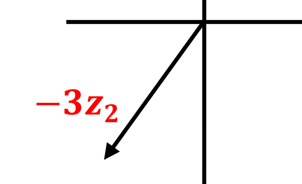
$2z_1 = 2(4 - 2i) = 8 - 4i$

$P(2z_1) = (8 , -4)$



$3z_2 = -3(1 + 2i) = -3 - 6i$

$P(3z_2) = (-3 , -6)$



الصيغة القطبية للعدد المركب

اذا كان $z = x + yi = (x , y)$ فإن $R(z) = x = r\cos\theta$ و $I(z) = y = r\sin\theta$ حيث ان $R(z)$ الجزء الحقيقي للعدد المركب $I(z)$ الجزء التخيلي للعدد المركب (r) مقياس العدد المركب وهو عدد حقيقي غير سالب ويسمى $mod\ z$ ويرمز له بالرمز $||Z||$ وتسمى (θ) سعة العدد المركب وتكتب $\theta = arg(z)$ حيث $\theta \in [0 , 2\pi]$ ويمكن القول أن $Z = ||z||(\cos(arg\ Z) + i\sin(arg\ Z))$ أو يكتب

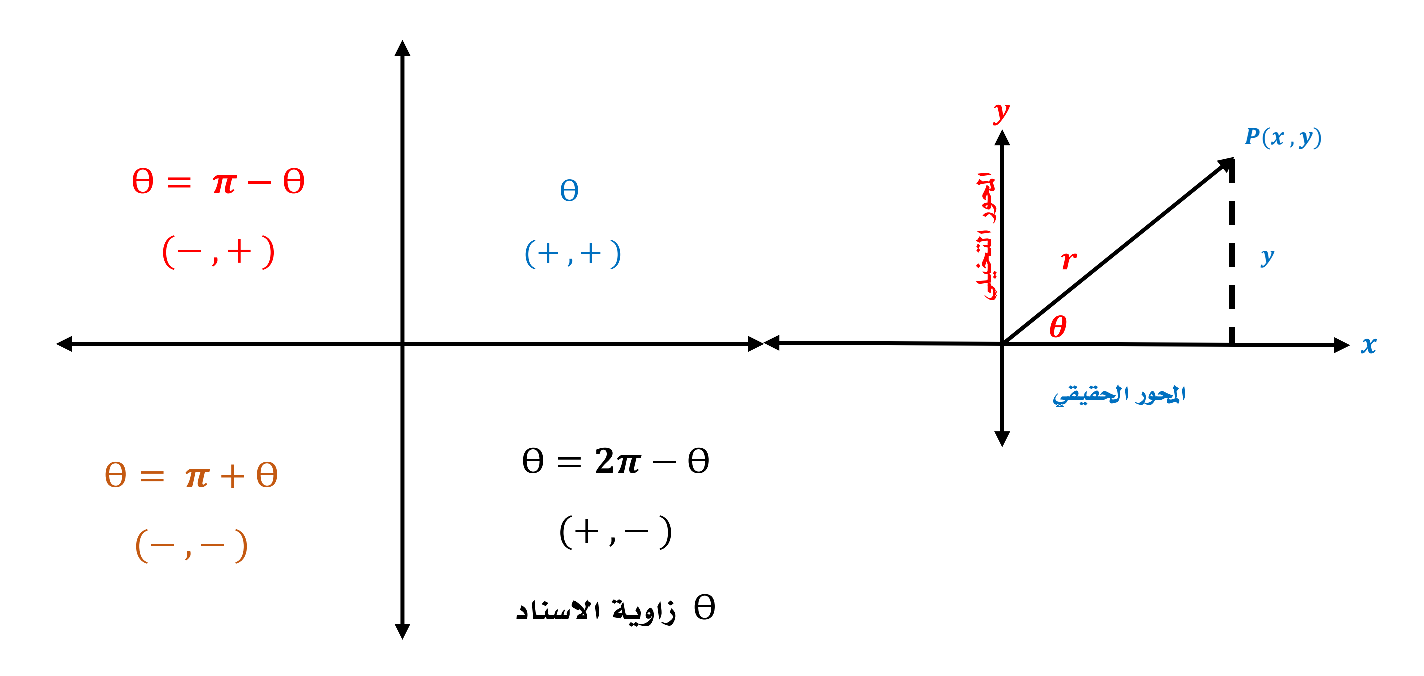
$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||}$$

الشكل يوضح كيفية ايجاد الزاوية بإستخدام

زاوية الاسناد وحسب موقعها والربع الذي تقع فيه



مثال : جد المقياس والقيمة الاساسية للاعداد المركبة التالية : $Z = 1 + \sqrt{3}i$

الحل :

$$r = mod\ Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{||Z||} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{||Z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$ الربع الأول

$Z = r(cos\theta + isin\theta)$

$Z = 2(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\,\frac{\pi}{3})$ الصيغة القطبية

مثال : اذا كان $x = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية للعدد Z

الحل :

$r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ الربع الثالث

السعة الاساسية للعدد المركب ، كل من $cos\,\theta\,,sin\,\theta$ (سالب) في الربع الثالث

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{1} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$Z = r(cos\theta + isin\theta) \Longrightarrow Z = \sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4})$ الصيغة القطبية

مثال : عبر عن كل $-2+2i$ من الاعداد التالية بالصيغة القطبية :

a) $-2+2i$ وزاري ٢٠١٣ / د١

$r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ المقياس

$cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ القيمة الاساسية

$\therefore cos\,\theta\,,sin\,\theta$ تقع في الربع الثاني $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ سعة العدد المركب

$Z = r(cos\theta + isin\theta)$

$Z = 2\sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4})$ الصيغة القطبية

b) $2\sqrt{3} - 2i$ وزاري ٢٠١٢ / د٢

١. المقياس

$r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow ||Z|| = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$

٢. القيمة الاساسية

$cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$\therefore +cos\,\theta\,, -sin\,\theta$ تقع في الربع الرابع $\theta = \frac{\pi}{6}$

٣- السعة للعدد المركب

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

٤- الصيغة القطبية

$$Z = 4\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$

مثال : عبر بالصيغة القطبية عن كل من الاعداد التالية :

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

a) 1

$$r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \sin\theta = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \theta = 0$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = (\cos 0 + i\sin 0)$$

b) -1

$$r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 1 \quad , \quad \theta = \pi$$

$$Z = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

c) i

$$r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

d) $-i$

$$r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow ||Z|| = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

الحالات الثابتة

$$z = (\cos 0 + i\sin 0) = 1$$

$$z = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1$$

$$z = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i$$

$$z = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -i$$

$\pi = 180$, $2\pi = 360$, $\frac{\pi}{2} = 90$, $\frac{\pi}{3} = 60$, $\frac{\pi}{4} = 45$, $\frac{\pi}{6} = 30$, $\frac{3\pi}{2} = 270$

ملاحظة : من خلال المثال السابق يمكن ان نستنتج طريقة يمكن تطبيقها على الاعداد المركبة وكما يلي :

$$3 = 3(1) = 3(1 + 0i) = 3\,(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$5i = 5(0 + i) = 5\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$-2 = 2\,(-1) = 2(-1 + 0i) = 2\,(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$-7i = 7\,(-i) = 7(0 - i) = 7\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

مبرهنة ديموافر

$Z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, لكل $n \in N, \theta \in R$

$Z^n = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$, لكل $n \in N, \theta \in R$

$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

مثال : أحسب $(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4$ باستخدام مبرهنة ديموافر

الحل :

$$(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4 = \left[\cos\frac{12}{8}\pi + i\sin\frac{12}{8}\pi\right] = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = 0 - i$$

مثال : بين لكل $\theta \in R, n \in N$ فإن $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

الحل :

$$LHS = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\cos\theta + (-i\sin\theta))^n = (\cos\theta + i\sin(-\theta))^n$$

$$= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n \quad (\emptyset = -\theta \text{ وبجعل})$$

$$= [\cos(\emptyset) + i\sin(\emptyset)]^n = \cos(n\emptyset) + i\sin(n\emptyset)$$

$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) = RHS$$

ملاحظة : قوانين مهمة في عمليات التبسيط :

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

مثال : أحسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$ وزاري ٢٠١٣ / د٢ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

(١) التحويل للصيغة القطبية

$$Z = 1 + i \Rightarrow r = mod\ Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$ تقع في الربع الاول

$$Z = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

الصيغة القطبية عندما ترفع الى n :

$$Z^n = r^n(cos\theta + i\sin\theta)^n \Rightarrow Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

(٢) نطبق مبرهنة ديموافر

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11}(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$$

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left(cos\,11.\frac{\pi}{4} + i\,sin\,11.\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^{10}.\sqrt{2}(cos\,11.\frac{\pi}{4} + i\,sin\,11.\frac{\pi}{4})$$

$$Z^{11} = [2^{(\frac{1}{2})}]^{10}.\sqrt{2}\left(cos\,11.\frac{\pi}{4} + i\,sin\,11.\frac{\pi}{4}\right) = 2^5.\sqrt{2}\left(cos\,11.\frac{\pi}{4} + i\,sin\,11.\frac{\pi}{4}\right)$$

لذلك نطرح منها دورة واحدة $\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi - 8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

وهي تقع في الربع الثاني $180 - 135 = 45$

في الربع الثاني $sin\,45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، في الربع الثاني $-cos\,45 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$Z^{11} = 32\sqrt{2}\,(-cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4})$$

$$Z^{11} = 32\sqrt{2}\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$Z^{11} = \frac{-32\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$Z^{11} = (-32 + 32i) = 32(-1 + i)$$

ملاحظة :

لا يمكن التعامل مع اي زاوية الا اذا كانت بالقياس الرئيسي اي انها تقع في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$ اذا كانت الزاوية اكبر من 2π نطرح منها دورة كاملة وهي 2π واحيانا نطرح دورتين يعني 4π او ثلاث دورات يعني 6π حتى نصل الى زاوية ذات قياس رئيسي اي زاوية تقع في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

ملاحظة : اذا كان الاس سالب فإن :

$\because Z^{-n} = (cos\theta + i\,sin\,\theta)^{-n} = cos(-n\theta) + isin(-n\theta) = cos\,n\theta - isin\,n\theta$

$\therefore Z^{-n} = cos\,n\theta - isin\,n\theta$

مثال : أحسب باستخدام مبرهنة ديموافر $\frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4}$

$$\frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4} = (1-\sqrt{3}i)^{-4}$$

١- نستخرج الصيغة القطبية

$$r = ||Z|| = mod\,Z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$cos = \frac{1}{2}$, $sin = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ تقع في الربع الرابع

$$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

٢- نطبق قانون مبرهنة ديموافر

$$Z = [2\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)]^{-4}$$

$$Z = (2)^{-4}(cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})^{-4}$$

$$Z = (2)^{-4}\,(cos\,4\,.\frac{5\pi}{3} - \,i\,sin\,4.\frac{5\pi}{3})$$

$$Z = (2)^{-4}(cos\,20\frac{\pi}{3} - i\,sin\,20\frac{\pi}{3})$$

$\theta = 20\frac{\pi}{3} - 6\pi = \frac{20\pi - 18\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ نطرح ثلاث دورات

$$Z = (2)^{-4}(cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$\theta = 180 - 60 = 120 = 60$ تقع في الربع الثاني

$-cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$Z = (2)^{-4}\,(cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$$Z = (2)^{-4}\,(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$Z = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{32} - i\frac{\sqrt{3}}{32}$$

ملاحظة : اذا Z_2 , Z_1 بالصيغة القطبية فإن حاصل ضربهما يساوي حاصل ضرب مقياسيهما في حاصل جمع سعتيهما .

مثال : احسب Z_1 , Z_2 اذا كان

$$Z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$
$$Z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

الحل :

$$Z_1.Z_2 = 3 \times 2\,[\cos(\frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3})]$$

$$Z_1.Z_2 = 6(\cos\pi + i\sin\pi) = 6(-1 + 0) = -6$$

ملاحظة : حاصل قسمة عددين مركبين

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_1)$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)})$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

حيث ان حاصل قسمة عددين مركبين = حاصل قسمة المقياس الاول على مقياس الثاني مضروب بحاصل طرح سعتيهما (سعة الاول – سعة الثاني)

مثال : اذا كان

$$Z_1 = 4(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})$$
$$Z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

فجد $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})}{(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})})$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4[\cos(\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{2})]$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4[\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)]$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4})$$

مثال : جد ما يأتي : $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)}$

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)} = \cos(2\theta - 3\theta) + i\sin(2\theta - 3\theta)$$
$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

مثال : حل المعادلة $x^3+1=0$ حيث $x\in\mathbb{C}$

بالجذر التكعيبي $\because x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x^3=\cos\pi+i\sin\pi$

$\therefore x=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}=\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right]$ $k=0,1,2$

عندما $k=0$ $x_1=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

عندما $k=1$ $x_2=\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)=(\cos\pi+i\sin\pi)$

$x_2=-1+i(0)=-1$

عندما $k=2$ $x_3=\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

مجموعة الحل للمعادلة $\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-1,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

مثال: اوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له

$Z=\sqrt{3}+i \Rightarrow r=||Z||=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{||Z||}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{||Z||}=\frac{1}{2}$ تقع في الربع الاول $\theta=\frac{\pi}{6}$

$Z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$Z^2=(2)^2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^2$

$Z^2=4(\cos2\frac{\pi}{6}+i\sin2\frac{\pi}{6}=4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$(Z^2)^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{\frac{1}{5}}$

$\sqrt[5]{z^2}=\sqrt[5]{4}\left(\frac{\cos\frac{\pi+6k\pi}{3}}{5}+i\frac{\sin\frac{\pi+6k\pi}{3}}{5}\right)$

$\sqrt[5]{z^2}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi+6k\pi}{15}+i\sin\frac{\pi+6k\pi}{15}\right)$, $k=0,1,2,3,4$

$Z_1=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$ عندما $k=0$

$Z_2=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15})$ عندما $k=1$

$Z_3=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15})$ عندما $k=2$

$Z_4=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15})$ عندما $k=3$

عندما $k = 4$ $\quad Z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

حل تمارين (5 - 1)

س1 / احسب ما يلي :

a) $[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi]^4 = \left[\cos 4\frac{5}{24}\pi + i\sin 4\frac{5}{24}\pi\right] = [\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}]$

تقع في الربع الثاني $\boxed{\frac{\pi}{6} = 30 \;,\; 5\times 30 = 150 \;,\; 180 - 150 = 30}$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = [-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}]$$

b) $[\cos 3\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi]^{-3}$

$$[\cos\left(-3\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin(-3\frac{7}{12}\pi)] = [\cos\frac{-7\pi}{4} + i\sin\frac{-7\pi}{4}] = [\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}]$$

تقع في الربع الرابع $\boxed{7\times 45 = 315 \;,\; \frac{\pi}{4} = 45}$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

س2 / احسب باستخدام مبرهنة ديموافر (أو التعميم) ما يأتي :

a) $(1-i)^7$ وزاري ٢٠١٢ / د١

$$z = 1 - i \Rightarrow r = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||}\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi-\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$ تقع في الربع الرابع

$$Z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$ الصيغة القطبية

نبدأ بتطبيق مبرهنة ديموافر

$$Z^7 = (\sqrt{2})^7(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = (\sqrt{2})^7(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})^7$$

$$Z^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos 7\frac{7\pi}{4} + i\sin 7\frac{7\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^6\sqrt{2}(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4})$$

$$\frac{49\pi}{4} - 12\pi = \frac{49\pi - 48\pi}{\pi} = \frac{\pi}{4}$$ تقع في الربع الرابع

$$= 2^3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8 + 8i$$

b) $(\sqrt{3}+1)^{-9}$ وزاري ٢٠١٤ / د٢

$$Z = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow r = ||Z|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||} = \frac{1}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$ الزاوية في الربع الاول

$$Z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$ الصيغة القطبية

نبدأ بتطبيق مبرهنة ديموافر

$$Z^{-9} = (\sqrt{3}+1)^{-9} = r^{-9}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-9} = (2)^{-9}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-9}$$

$$Z^{-9} = \frac{1}{(2)^9}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-9} = \frac{1}{512}\left(\cos\left(\frac{-9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-9\pi}{6}\right)\right)$$

$$Z^{-9} = \frac{1}{512}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$Z^{-9} = \frac{1}{512}(0 - i(-1)) = \frac{i}{512}$$

س3 / بسط ما ياتي : وزاري ٢٠١٣ / د٢

a) $\frac{[\cos2\theta + i\sin2\theta]^5}{[\cos3\theta + i\sin3\theta]^3}$

$$\frac{[\cos2\theta + i\sin2\theta]^5}{[\cos3\theta + i\sin3\theta]^3} = \frac{[(\cos\theta + i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta + i\sin\theta)^3]^3} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9} = \cos\theta + i\sin\theta$$

b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4(\cos\theta + i\sin\theta)^4(\cos\theta - i\sin\theta)^4$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4[(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)]^4$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4[(\cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2]^4$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2]^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4[(1)]^4$$

$$= \cos4\theta + i\sin4\theta$$

س4 / باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$

$$Z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = ||Z|| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{-1}{2}$, $sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ الزاوية في الربع الثاني

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt{Z} = \sqrt{-1+\sqrt{3}i} = (-1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} = (r)^{\frac{1}{2}}(cos\theta + i\,sin\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{Z} = 2^{\frac{1}{2}}\left[cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\,sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right]$$

$$\sqrt{Z} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{2\pi+6k\pi}{3}}{2} + i\,sin\frac{\frac{2\pi+6k\pi}{3}}{2}\right) = \sqrt{2}(cos\frac{2\pi+6k\pi}{6} + i\,sin\frac{2\pi+6k\pi}{6})$$

$$if \quad k=0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2}(cos\frac{2\pi}{6} + i\,sin\frac{2\pi}{6}) = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3})$$

$Z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ عندما $k = 0$

$Z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{8\pi}{6} + i\,sin\frac{8\pi}{6}) = \sqrt{2}(cos\frac{4\pi}{3} + i\,sin\frac{4\pi}{3})$ عندما $k = 1$

$$Z_2 = \sqrt{2}\left(-cos\frac{\pi}{3} - i\,sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$\frac{4\pi}{3}$ تقع في الربع الثالث $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{4\pi-3\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ حيث ان sin, cos سالبة في الربع الثالث

س5 / باستخدام مبرهنة ديموفر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$

$$Z = 27i \Rightarrow r = mod\,Z = ||Z|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(27)^2} = 27$$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{0}{27} = 0$, $sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||} = \frac{27}{27} = 1$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ الربع الأول

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{27i} = (27i)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}(cos\theta + i\,sin\theta)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\,(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{27}\left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0,1,2$$

$$if \quad k=0 \Rightarrow Z_1 = 3\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right]$$

$if \quad k=1 \Rightarrow Z_2 = 3\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ تقع في لربع الثاني

$$Z_2 = 3\left(-cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left[\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right]$$

$$if \quad k = 2 \Rightarrow Z_3 = 3\left(cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) = 3\left(cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$Z_3 = 3\,(0 + (-1)i) = 0 - 3i = -3i$$

س6 / جد الجذور الاربع للعدد (-16) باستخدام مبرهنة ديموا فر . وزاري ٢٠١٨ دور ١ إحيائي

$$Z = -16 \Rightarrow r = mod\,Z = ||z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(16)^2} = 16$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{-16}{16} = -1 \quad , \; sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||} = \frac{0}{16} = 0 \quad \theta = \pi$$ الربع الثاني

$$\sqrt[4]{Z} = \sqrt[4]{-16} = (-16)^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{1}{4}}(cos\theta + i\,sin\theta)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}\,(cos\pi + i\,sin\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[4]{Z} = \sqrt[4]{16}\left(cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad n = 4 \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$if \;\; k = 0 \Rightarrow Z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$if \;\; k = 1 \Rightarrow Z_2 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_2 = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$if \;\; k = 2 \Rightarrow Z_3 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$Z_3 = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$if \;\; k = 3 \Rightarrow Z_4 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_4 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

س7 / جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر

$$Z = -64i \Rightarrow r = mod\,Z = ||z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(64)^2} = 64$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} = \frac{0}{64} = 0 \quad , \; sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||} = \frac{-64}{64} = -1 \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$ الربع الثالث

$$\sqrt[6]{Z} = \sqrt[6]{-64i} = (-64i)^{\frac{1}{6}} = r^{\frac{1}{6}}(cos\theta + i\,sin\theta)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}}\,(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2})^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[6]{Z} = \sqrt[6]{64} = \left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\right)\right]$$

$$\sqrt[6]{Z} = 2\left[cos\left(\frac{3\pi+4k\pi}{12}\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi+4k\pi}{12}\right)\right] \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots 5$$

$if \;\; k=0 \Rightarrow Z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{12} + i\,sin\frac{3\pi}{12}\right) = 2(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$if \;\; k=1 \Rightarrow Z_2 = 2\left(cos\frac{7\pi}{12} + i\,sin\frac{7\pi}{12}\right) = 2(cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) + i\,sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}))$

$$Z_2 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sin\left(\frac{\pi}{3}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\left(sin\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$Z_2 = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 2\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + i\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

$$Z_2 = 2\left[\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\right] = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$if \;\; k=2 \Rightarrow Z_3 = 2\left(cos\frac{11\pi}{12} + i\,sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$if \;\; k=3 \Rightarrow Z_4 = 2\left(cos\frac{15\pi}{12} + i\,sin\frac{15\pi}{12}\right) = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}\right)$ تقع في الربع الثالث

$$Z_4 = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$if \;\; k=4 \Rightarrow Z_5 = 2\left(cos\frac{19\pi}{12} + i\,sin\frac{19\pi}{12}\right)$

$if \;\; k=5 \Rightarrow Z_6 = 2\left(cos\frac{23\pi}{12} + i\,sin\frac{23\pi}{12}\right)$

حلول التمارين العامة الخاصة بالفصل الأول

س1/ جد قيم $x, y \in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$ (وزاري ٢٠١٣ / د٣)

الحل : بما ان $4 = -4i^2$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i} = \frac{(x+2i)(x-2i)}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i} = (x-2i)$$

$y = (1+i)(x-2i)$

$y = x - 2i + xi - 2i^2$

$y + 0i = x + 2 - 2i + xi$

$y + 0i = (x+2) + (-2+x)i$

$y = x + 2 \quad \ldots..(1)$

$0 = -2 + x \quad \ldots(2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$\therefore \;\; y = 2 + 2 = 4$

س2/ اذا كان $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عدداً مركبا جد باستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{2}}$

الحل :

$$\because \sqrt{-3} = \sqrt{3}\, i$$

$$z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3i^2}{1+3} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$\therefore z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

نجد السعة والمقياس

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$ المقياس

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

نستنتج أن الزاوية θ تقع في الربع الثالث

$$\therefore arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3}$$

الصورة القطبية للعدد المركب

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0, 1$$

$$if \quad k=0 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$ تقع في الربع الثاني $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$z^{\frac{1}{2}} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$if \quad k=1 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}\right)\right]$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)$$ تقع في الربع الرابع

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

س / اذا كان $Z = \cos 2x + i\sin 2x$ فاثبت أن $\frac{2}{1+z} = 1 - i\tan x$

وزاري خارج القطر ٢٠١٩ / دور أول

الحل : ط 1

$$LHS: \frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+\cos 2x + i\sin 2x}$$

$$= \frac{2}{1+\cos^2 x - 1 + 2i\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2}{2\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{\cos^2 x - i^2\sin^2 x}{\cos x(\cos x + i\sin x)}$$

$$= \frac{(\cos x - i\sin x)(\cos x + i\sin x)}{\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{(\cos x - i\sin x)}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{i\sin x}{\cos x} = 1 - i\tan x \ : RHS$$

ط 2 :

$$LHS: \frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+\cos 2x + i\sin 2x}$$

$$= \frac{2}{1+\cos^2 x - 1 + 2i\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2}{2\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{(\cos x + i\sin x)^{-1}}{\cos x} = \frac{(\cos x - i\sin x)}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{i\sin x}{\cos x} = 1 - i\tan x \ : RHS$$

س / اذا كان $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ اثبت أن $\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{1}{2\cos n\theta}$ وزاري ٢٠١٩ / دور ثاني

الحل :

$$LHS: \frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n}}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+2\cos^2 n\theta - 1 + i(2\sin n\theta\cos n\theta)} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos^2 n\theta + i(2\sin n\theta\cos n\theta)}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = \frac{1}{2\cos n\theta} \ : RHS$$

الفصل الثاني
القطوع المخروطية



القطوع المخروطية

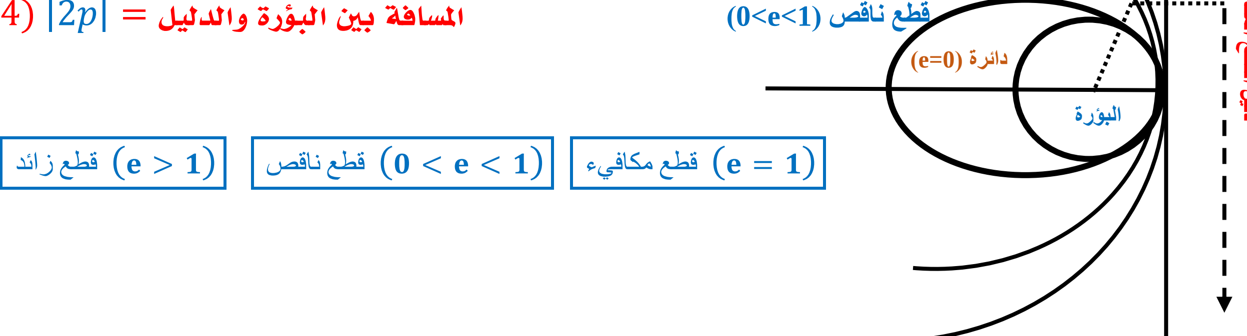
القطع المخروطي : ليكن $(x_1\,,y_1)$ نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax+by+c=0$ مستقيم ثابت في المستوي نفسه لذا فإن مجموعة كل النقاط التي نسبة بعد كل منها عن النقطة $(x_1\,,y_1)$ الى بعدها عن المستقيم $ax+by+c=0$ تساوي عدد ثابت (e) تكون شكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي أو هو مجموعة النقط التي بعدها عن نقطة معلومة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم $(ax+by+c=0)$ تساوي عدداً ثابتا (e) :

1) $F(x,y)$ البؤرة

2) $ax+by+c=0$ معادلة الدليل

3) e الاختلاف المركزي $\left(e=\dfrac{c}{a}\right)$

4) $|2p| =$ المسافة بين البؤرة والدليل



المعادلة العامة للقطع المخروطي :

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2\,\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

ملاحظات :

1) النقطة السينية (تقع على المحور السيني) أحداثيها الصادي يكون صفراً $(x\,,0)$.

2) النقطة الصادية (تقع على المحور الصادي) إحداثيها السيني يكون صفراً $(0\,,y)$.

3) كل مستقيم يوازي المحور السيني معادلته تكون (ما يقطعه من المحور y)

4) كل مستقيم يوازي المحور الصادي معادلته تكون (ما يقطعه من المحور x)

القطع المكافئ Parabola

القطع المكافئ : هو مجموعة النقط $M\,(x\,,y)$ في المستوي والتي يكون بعدها عن نقطة ثابتة $F(p\,,0)$ تسمى البؤرة حيث $p\neq 0$ يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى (الدليل D) وهو لا يحتوي البؤرة .

أو بمعنى آخر هو مجموعة من النقط داخل مستوي والتي يكون بعدها عن نقطة معلومة مساويا لبعدها عن مستقيم معلوم .

للقطع المكافئ حالتان هما :

أولاً : البؤرة تقع على المحور السيني $(x - axis)$ والرأس في نقطة الاصل .

١- الفتحة نحو اليمين :

قانون البعد $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

تعريف القطع المكافئ $\frac{MF}{MQ} = e = 1 \Rightarrow MF = MQ$

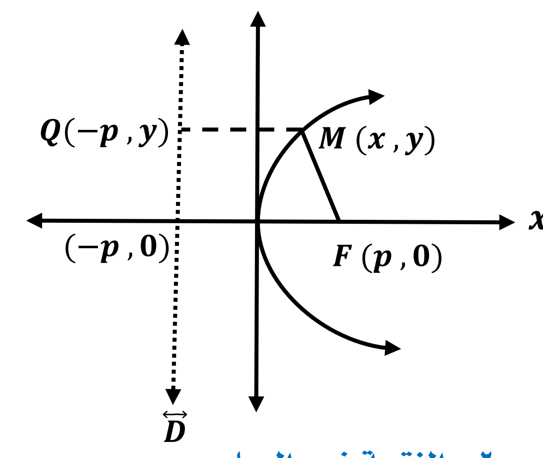
بتربيع الطرفين $\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$

$x^2 - 2px + P^2 + y^2 = x^2 + 2px + P^2$



معادلة القطع المكافئ $\therefore y^2 = 4px \quad \forall p > 0$

معادلة الدليل $x = -p$



٢- الفتحة نحو اليسار :

معادلة القطع المكافئ $y^2 = -4px$

معادلة الدليل $x = p$

ثانيا : البؤرة تقع على محور الصادات $(y - axis)$ والرأس في نقطة الاصل :

١- الفتحة نحو الاعلى :

تكون هنا معادلة القطع دالة حقيقية

قانون البعد $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

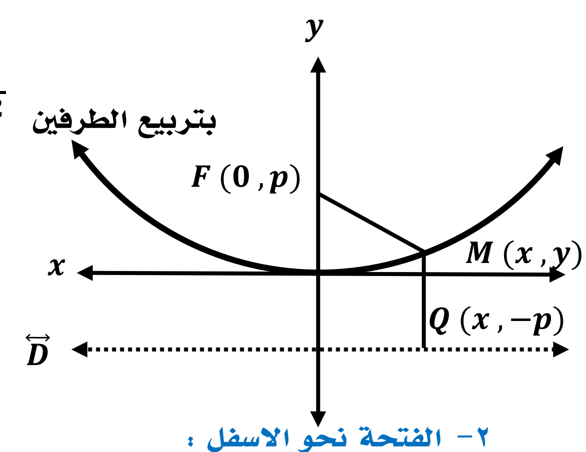
تعريف القطع المكافئ $MF = MQ$

بتربيع الطرفين $\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$

$x^2 + y^2 - 2py + P^2 = y^2 + 2py + P^2$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = 4py \quad \forall p > 0$

معادلة الدليل $y = -p$



٢- الفتحة نحو الاسفل :

معادلة القطع المكافئ $x^2 = -4py$

معادلة الدليل $y = p$

نلاحظ مما سبق انه يوجد معادلتين للقطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل $(0\,,0)$ أحداهما عندما يكون على المحور السيني والاخرى عندما يكون على المحور الصادي والجدول أدناه يوضح ذلك :

عندما يكون على محور السينات $x-axis$	عندما يكون على محور الصادات $y-axis$
١) البؤرة تنتمي لمحور السينات $x-axis$	١) البؤرة تنتمي لمحور الصادات $y-axis$
٢) البؤرة $F\,(p\,,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$	٢) البؤرة $F\,(0\,,p)$ ومعادلة الدليل $y=-p$
٣) معادلة محور القطع هي $y=0$	٣) معادلة محور القطع هي $x=0$
٤) الدليل يوازي المحور الصادي	٤) الدليل يوازي المحور السيني
٥) التناظر حول محور السينات	٥) التناظر حول محور الصادات
٦) المحور السيني ينصف الدليل	٦) المحور الصادي ينصف الدليل
٧) القانون $y^2=4px$	٧) القانون $x^2=4py$

ملاحظات عامة :

١. اشارة البؤرة عكس اشارة الدليل والعكس صحيح .
٢. المسافة بين البؤرة والدليل $=2p$
٣. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ فهي تحقق معادلته (اي ان القطع المكافئ يمر بها)
٤. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ بعدها عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل .
٥. رأس القطع المكافئ هو نقطة الاصل ومعادلة المميز الخاصة به هي $b^2-4ac=0$

جدول تظهر فيه جميع حالات القطع المكافئ :

التناظر	اتجاه القطع	المحور	الدليل	البؤرة	المعادلة
$x-axis$	يمين	x	$x=-p$	$F\,(p\,,0)$	$y^2=4px$
$x-axis$	يسار	x	$x=p$	$F\,(-p\,,0)$	$y^2=-4px$
$y-axis$	أعلى	y	$y=-p$	$F\,(0\,,p)$	$x^2=4py$
$y-axis$	أسفل	y	$y=p$	$F\,(0\,,-p)$	$x^2=-4py$

مثال : جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ في كل مما يأتي :

a) $y^2=-8x$

$y^2=-8x$

$y^2=-4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p=8 \Rightarrow p=\dfrac{8}{4}=2$

$F\,(-p\,,0)=F\,(-2\,,0)$ البؤرة

$x=p \Rightarrow x=2$ معادلة الدليل

$x=-1$, $(1\,,2)$, $F\,(1\,,0)$, $(1\,,-2)$, $\overleftrightarrow{D}$, x , y

b) $y^2=4x$

الحل : $y^2 = 4px$ $\because$

$$4p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{4} = 1$$

البؤرة $F\,(p\,,0) = F(1\,,0)$

معادلة الدليل $x = -p \;\Rightarrow x = -1$

$$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(1)x = 4x \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$$

x	0	1	2
y	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$

ملاحظات لإيجاد معادلة القطع المكافئ رأسه نقطة الاصل ضمن الحالات الرئيسية الاتية :

أولا : اذا علمت بؤرة القطع المكافئ فإن الحل يكون بشكل مباشر تستخرج قيمة p ونكتب المعادلة ونعوض .

ثانيا : اذا علمت معادلة الدليل فإن البؤرة ستكون على نفس المحور الذي يقطعه الدليل بالاتجاه الاخر فنقوم باستخراج احداثي البؤرة ثم نستخرج قيمة p ونكتب المعادلة ونعوض .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان أ) بؤرته هي $(3\,,0)$ ورأسه في نقطة الاصل .

ب) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه في نقطة الاصل .

الحل : أ)

البؤرة $\because (p\,,0) = (3\,,0)$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $\therefore p = 3 \;\Rightarrow y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ $\therefore y^2 = 4(3)x \;\Rightarrow\; y^2 = 12x$

ب)

معادلة الدليل $\because 2x - 6 = 0$

$\therefore 2x = 6 \;\Rightarrow x = 3$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $\therefore p = 3 \;\Rightarrow\; y^2 = -4px$

معادلة القطع المكافئ $\therefore y^2 = -4(3)x \Rightarrow\; y^2 = -12x$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ اذا علم : أ) بؤرته $(0\,,5)$ وراسه في نقطة الأصل

ب) معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه في نقطة الاصل

الحل : أ)

البؤرة $\because (\,0\,,p) = (0\,,5)$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $\therefore p = 5 \;\Rightarrow x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ $\therefore x^2 = 4(5)x \;\Rightarrow\; x^2 = 20y$

ب)

بالمقارنة مع معادلة الدليل $\because y = 7$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $\therefore p = 7 \;\Rightarrow x^2 = -4py$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = -4(7)y \Rightarrow\; x^2 = -28y$

ثالثا : اذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة فإنها تحقق معادلته فإذا كانت البؤرة تنتمي الى محور السينات تكتب إحدى معادلتي محور السينات ثم التعويض بها لإستخراج قيمة p ثم اعادة تعويضها بمعادلة القطع المكافئ واذا كانت البؤرة تنتمي لمحور الصادات كذلك نكتب احدى معادلتي محور الصادات ثم التعويض بها لإستخراج قيمة p ثم اعادة تعويضها بمعادلة القطع المكافئ وفي حالة لم يحدد موقع البؤرة يتم اخذ احتمالان معا .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطة $(2\,,4)$.

الحل : بما ان النقطة تقع بالربع الأول والبؤرة تقع على محور السينات فإن البؤرة تقع على محور السينات الموجب فتكون المعادلة

$$y^2 = 4px \Rightarrow (4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16 = 8p \Rightarrow p = \frac{16}{8} = 2$$

$$\therefore y^2 = 8x$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تقع على محور الصادات ويمر بالنقطة $(-1\,,-4)$.

الحل : بما ان انقطة تقع بالربع الثالث والبؤرة تقع على محور الصادات فإن البؤرة تقع على محور الصادات السالب فتكون المعادلة

$$x^2 = -4py \Rightarrow (-1)^2 = -4p(-4) \Rightarrow 1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16}$$

$$\therefore x^2 = -\frac{1}{4}y$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطة $(-2\,,6)$.

الحل : يوجد احتمالين للمعادلة القياسية للقطع المكافئ لعدم تحديد البؤرة ، والاحتمالين هما :

أولاً : البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب	ثانيا : البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب
$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(-2)^2 = 4p(6)$ $4 = 24p \Rightarrow p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ $x^2 = 4\left(\frac{1}{6}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$ معادلة القطع المكافئ	$y^2 = -4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(6)^2 = -4p(-2)$ $36 = 8p \Rightarrow p = \frac{9}{2}$ $y^2 = -4\left(\frac{9}{2}\right)x \Rightarrow y^2 = -18x$ معادلة القطع المكافئ

رابعا : اذا مر القطع المكافئ بنقطتين تقعان في ربعين متجاورين فإن البؤرة تقع على محور تناظر الربعين فنقوم بكتابة المعادلة المناسبة ثم نقوم بتعويض اي نقطة من النقطتين لاستخراج قيمة p ثم اعادة تعويضها بمعادلة القطع .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2\,,4),(2\,,-4)$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل : ∵ النقطتان تقعان بالربعين الأول والرابع فهذا يعني ان البؤرة تقع على محور السينات الموجب وبالتالي تكون معادلة القطع المكافئ هي

$$y^2 = 4px \Rightarrow (4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16 = 8\,p \Rightarrow p = \frac{16}{8} = 2$$

$$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(2)x \Rightarrow y^2 = 8x$$ معادلة القطع المكافئ

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(-2\sqrt{3}\,,-1),(\sqrt{6}\,,-\frac{1}{2})$

الحل : بما ان النقطتين تقعان في الربعين الثالث والرابع فإن البؤرة تقع على محور الصادات السالب وبذلك تكون معادلة القطع المكافئ هي

$$x^2=-4py \;\Rightarrow (\sqrt{6})^2=-4p\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 6=2p\Rightarrow p=3$$

$$x^2=-4py \;\Rightarrow\; x^2=-4(3)y \;\Rightarrow\; x^2=-12y$$ معادلة القطع المكافئ

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(4,-1)\,,(-4,-1)$ والرأس في نقطة الاصل .

الحل : بما ان النقطتين تقعان في الربعين الثالث والرابع فإن البؤرة تقع على محور الصادات السالب وبذلك تكون معادلة القطع المكافئ هي

$$x^2=-4\,py$$

$$(-4)^2=-4\,p(-1)\Rightarrow 16\;=\;-4\,p\,(-1)\;\Rightarrow 16=4p\;\Rightarrow p=\frac{16}{4}=4$$

$$x^2=-4\,(4)y\Rightarrow\; x^2=-16y$$ معادلة القطع المكافئ

خامسا : اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة معينة $(a\,,b)$ فاذا كانت البؤرة تقع على محور السينات فإن معادلة الدليل هي $x=a$ فنقوم باستخراج احداثي البؤرة ثم نستخرج قيمة p ثم نكتب المعادلة المناسبة ثم التعويض بها ، واذا كانت البؤرة تنتمي لمحور الصادات فإن معادلة الدليل هي $y=b$ فنقوم باستخراج احداثي البؤرة ثم نستخرج قيمة p ونكتب المعادلة المناسبة ونعوض بها وفي حالة عدم تحديد موقع البؤرة فيتم اخذ احتمالان معا .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(-2\,,3)$.

الحل : بما ان محور القطع المكافئ هو محور السينات والدليل يمر بنقطة تقع في الربع الثاني فإن البؤرة تقع على المحور السيني الموجب وبالتالي تكون

$x=-2$ معادلة الدليل $F(2\,,0)\Rightarrow p=2\;\Rightarrow y^2=4px\;\Rightarrow y^2=8x$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور الصادات ودليله يمر بالنقطة $(2\,,-4)$.

الحل : البؤرة صادية موجبة فتكون معادلة الدليل هي :

$$y\;=\;-4\;\Rightarrow F(0,4)\Rightarrow p=4\Rightarrow x^2=4\,py\Rightarrow x^2=(4)(4)y\Rightarrow\; x^2=16y$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة $(3\,,-5)$.

الحل : يوجد احتمالين للمعادلة القياسية للقطع المكافئ لعدم تحديد البؤرة ، والاحتمالين هما :

أولاً : البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب	ثانيا : البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب
$x^2=4py$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ	$y^2=-4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ
$y=-5\Rightarrow p=5\Rightarrow F(0\,,5)$	$x=3\;\Rightarrow p=3\Rightarrow F(-3\,,0)$
$x^2=4\,(5)y$	$y^2=-4(3)x$
$x^2=20y$ معادلة القطع المكافئ	$y^2=-12x$ معادلة القطع المكافئ

سادسا : اذا مر الدليل بنقطتين مختلفتين فإن معادلة الدليل هي $(y =)$ $either\ (x =)or$ المسقط المتساوي من النقطتين فنقوم باستخراج احداثي قيمة p ثم تكتب المعادلة المناسبة ثم التعويض بها .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية:

١- دليله يمر بالنقطتين $(-3\,,1)$ $(-3\,,9)$ ورأسه نقطة الاصل :

الحل : معادلة الدليل هي $x = -3$ أي أن $p = 3$

$$F(3\,,0) \Rightarrow y^2 = 4\,px \Rightarrow y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

٢- دليله يمر بالنقطتين $(-4\,,2)$, $(-7\,,2)$ ورأسه نقطة الاصل :

الحل : معادلة الدليل هي $y = 2$ أي أن $p = 2$

$$F(0\,,-2) \Rightarrow x^2 = -4\,py \Rightarrow x^2 = -4(2)x \Rightarrow x^2 = -8y$$

سابعا : اذا مر الدليل بنقطة تقع على احد المحورين الاحداثيين فإن البؤرة تقع على نفس المحور بالاتجاه الاخر .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ في الحالات الاتية :

١- دليله يمر بالنقطة $(-4\,,0)$ ورأسه نقطة الاصل :

الحل : بما ان الدليل يمر بالنقطة $(-4\,,0)$ فهذا يعني أن البؤرة $(4\,,0)$ اي ان $p = 4$

$$y^2 = 4\,px \Rightarrow y^2 = 4\,(4)x \Rightarrow y^2 = 16x$$

٢- دليله يمر بنقطة تقاطع $2x + 3y = 12$ مع محور الصادات ورأسه نقطة الاصل :

الحل :

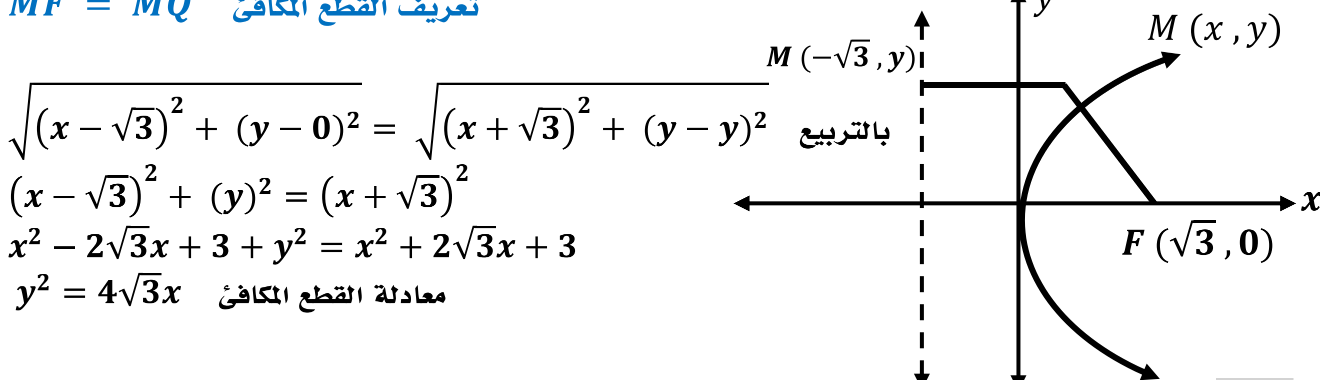
$$x = 0 \text{ عندما } \Rightarrow 2(0) + 3y = 12 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$$

$$F(0,-4) \Rightarrow p = 4 \Rightarrow x^2 = -4\,py \Rightarrow x^2 = -4\,(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$$

مثال : باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3}\,,0)$ ورأسه في نقطة الاصل .

الحل : البؤرة $F(\sqrt{3}\,,0)$ ولتكن النقطة $M(x\,,y)$ نقطة تنتمي الى منحني القطع المكافئ ولتكن النقطة $Q(-\sqrt{3}\,,y)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل $\overleftrightarrow{D}$ فمن تعريف القطع المكافئ

$MF = MQ$ تعريف القطع المكافئ



$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + (y-y)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$(x-\sqrt{3})^2 + (y)^2 = (x+\sqrt{3})^2$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x \quad \text{معادلة القطع المكافئ}$$

مثال : جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $3x^2 - 24y = 0$

الحل :

$$\because\ 3x^2 - 4y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 24y \quad (\text{نقسم طرفي المعادلة على } 3)$$

$$x^2 = 8y$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $x^2 = 4py$

$4p = 8 \Rightarrow p \dfrac{8}{4} = 2$

البؤرة $F\,(0\,,p) = F\,(0\,,2)$

معادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = -2$

مثال : جد البؤرة والدليل للقطع المكافئ : $3y^2 = 16x - y^2$

الحل :

$3y^2 + y^2 = 16x$

نقسم على (4) $\quad 4y^2 = 16x$

$y^2 = 4\,x$

$y^2 = 4\,px \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = \dfrac{4}{4} = 1$

البؤرة هي $F\,(1\,,0)$ ومعادلة الدليل $x = -1$

مثال : اذا كانت $x^2 - 2ky = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(0\,,1)$ فجد قيمة (k) .

الحل : البؤرة $(0\,,1)$ صادية موجبة فتكون معادلة القطع هي : $x^2 = 4\,py$

$p = 1 \Rightarrow x^2 = 4\,y$

$x^2 = 4\,y$

$x^2 = 2ky$

$2k = 4 \Rightarrow k = 2$

مثال : جد قيمة a من معادلة القطع المكافئ $\frac{1}{4}y^2 = ax$ رأسه نقطة الاصل ويمر دليله بالنقطة $(-6\,,3)$.

الحل :

معادلة قطع مكافئ بؤرته تقع على محور السينات $\frac{1}{4}y^2 = ax \Rightarrow y^2 = 4ax$

$\because (-6\,,3)$ الدليل يمر بالنقطة $\Rightarrow x = -6$ معادلة الدليل $p = 6$

$y^2 = 4px$

$\underline{y^2 = 4ax}$

$4a = 4p \Rightarrow a = p \Rightarrow a = 6$

ملاحظات :

متساويان

1) اذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1)\,,(x_1, -y_1)$ فالبؤرة سينية .

2) اذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1)\,,(-x_1, y_1)$ فالبؤرة صادية .

متساويان

واجب : اذا كانت $y^2 - 4kx = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(-2\,,0)$ فجد قيمة (k) .

واجب : جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 1)\,,(-2, 1)$ والرأس في نقطة الاصل .

أنسحاب المحاور للقطع المكافئ

درسنا في الامثلة السابقة القطع المكافئ الذي يكون رأسه نقطة الاصل وبؤرته تقع على احدى المحاور الاحداثية (السينية أو الصادية) ، والآن سوف ندرس القطع المكافئ بعد إنسحابه الى جهة معينة وسوف نرمز الى رأس القطع بـ (h , k) وهذا الجدول يلخص لنا جميع الحالات :

فتحة القطع	المحور الموازي	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة المحور	معادلة القطع
يمين	x	$\bar{F}(p+h , k)$	$x = -p+h$	$y = k$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
يسار	x	$\bar{F}(-p+h , k)$	$x = p+h$	$y = k$	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$
أعلى	y	$\bar{F}(h , p+k)$	$y = -p+k$	$x = h$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
أسفل	y	$\bar{F}(h , -p+k)$	$y = p+k$	$x = h$	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$

والجدول أدناه يوضح الفروق بين المعادلات بين كلا المحورين :

عندما يكون على محور السينات $x-axis$	عندما يكون على محور الصادات $y-axis$
١) البؤرة $\bar{F}(p+h , k)$ ومعادلة الدليل $x = -p+h$	١) البؤرة $\bar{F}(h , p+k)$ ومعادلة الدليل $y = -p+k$
٢) الدليل يوازي المحور الصادي	٢) الدليل يوازي المحور السيني
٣) الرأس والبؤرة يقعان على الاحداثي السيني	٣) الرأس والبؤرة يقعان على الاحداثي الصادي
٤) الرأس $V(h , k)$	٤) الرأس $V(h , k)$
٥) القانون $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	٥) القانون $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
٦) معادلة المحور $y = k$	٦) معادلة المحور $x = h$

ملاحظة : الرأس هو منتصف البعد بين البؤرة والدليل اي ان

$$x_{\text{الرأس}} = \frac{x_{\text{الدليل}} + x_{\text{البؤرة}}}{2} \quad \text{وكذلك} \quad y_{\text{الرأس}} = \frac{y_{\text{الدليل}} + y_{\text{البؤرة}}}{2}$$

مثال : عين الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافئ : $(y+1)^2 = 4\,(x-2)$

الحل : الفتحة نحو اليمين : بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$

$h = 2 \quad k = -1 \quad \Rightarrow (h , k) = (2 , -1)$ الرأس

$\because\ 4p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{4} = 1$

$\bar{F}(p+h , k) = \bar{F}(1+2 , -1) = \bar{F}(3 , -1)$ البؤرة

$y = k \Rightarrow y = -1$ معادلة المحور

$x = -p + h \Rightarrow x = -1 + 2 = 1$ معادلة الدليل

ملاحظة : في بعض الحالات نحتاج الى التحويل لصيغة المربع الكامل لجعل المقارنة ممكنة مع معادلة القطع فإذا كانت المعادلة $(x^2 + \underline{\underline{b}}x = c)$ فنضيف للطرفين (مربع نصف معامل x) اي $(\frac{b}{2})^2$ ولا يصح هذا القانون الا اذا كان (x^2 معامل $= 1$) .

مثال : ناقش القطع المكافئ $x^2 + 4x + 2y - 2 = 0$

الحل :

$$x^2 + 4x = -2y + 2$$
$$x^2 + 4x\underline{+4} = -2y + 2\underline{+4}$$
$$(x+2)^2 = -2y + 6$$
$$(x+2)^2 = -2(y-3)$$
$$(x-h)^2 = -4p\,(y-k)$$

$h = -2 \quad , \quad k = 3 \quad \Longrightarrow (h\,,k) = (-2\,,3)$ الرأس

$-4p = -2 \quad \Longrightarrow p = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \bar{F}(h\,,-p+k) = \bar{F}\left(-2\,,\frac{-1}{2}+3\right) = \bar{F}\left(-2\,,\frac{5}{2}\right)$ البؤرة

$x = h \Longrightarrow x = -2$ معادلة المحور

$\because \; y = p + k \Longrightarrow y = \frac{1}{2} + 3 = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \Longrightarrow y = 3\frac{1}{2}$ معادلة الدليل

مثال : جد احداثي الرأس والبؤرة ومعادلة محور القطع ومعادلة الدليل للقطع المكافئ :

الحل :

$$3y^2 - 24y = 12\,x \quad] \div 3$$
$$y^2 - 8y = 4\,x$$
$$y^2 - 8y\underline{+16} = 4\,x\,\underline{+16}$$
$$(y-4)^2 = 4(x+4)$$
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$h = -4 \quad , \quad k = 4 \quad \Longrightarrow (h\,,k) = (-4\,,4)$ الرأس

$4p = 4 \quad \Longrightarrow p = \frac{4}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \bar{F}(p+h\,,k) = \bar{F}(1-4\,,4) = \bar{F}(-3,4)$ البؤرة

$y = k \;\Longrightarrow y = 4$ معادلة المحور

$x = -p + h \Longrightarrow x = -1 - 4 = -5$ معادلة الدليل

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-1\,,3)$ ويمر بالنقطة $(3\,,5)$ ومحوره يوازي محور السينات .

الحل :

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y-3)^2 = 4p(x+1)$$

$(h\,,k) \Longrightarrow (-1\,,3)$ الرأس $(3\,,5) \in$ للقطع

$(5-3)^2 = 4p(3+1) \Longrightarrow 4 = 16\,p \Longrightarrow p = \frac{1}{4} \Longrightarrow \quad \therefore \; (y-3)^2 = (x+1)$ المعادلة

مثال : جد احداثي الرأس والبؤرة ومعادلة محور القطع ومعادلة الدليل للقطع المكافئ .

الحل :

$$y^2+8y-8x+24=0$$
$$y^2+8y=8x-24$$
$$y^2+8y+(16)=8x-24+(16)$$
$$y^2+8y+(16)=8x-8$$
$$(y+4)^2=8(x-1)$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

$h=1 \quad , \quad k=-4 \quad \Rightarrow (h,k)=(1,-4)$ الرأس

$4p=8 \Rightarrow p=\frac{8}{4}=2 \Rightarrow \overline{F}(p+h,k)=\overline{F}(2+1,-4)=\overline{F}(3,-4)$ البؤرة

$y=k \Rightarrow y=-4$ معادلة الدليل

$x=-p+h \Rightarrow x=-2+1 \Rightarrow x=-1$ معادلة المحور

ملاحظة : يمكننا استنتاج معادلة المحور من الجزء الذي فيه تربيع في المعادلة ، كما في الامثلة أدناه :

$$(y-5)^2=6(x-2) \Rightarrow y=5$$
$$(x+2)^2=3(y-1) \Rightarrow x=-2$$
$$x^2=12y \Rightarrow x=0$$
$$y^2=-4x \Rightarrow y=0$$

حل تمارين $(2-1)$

س1/ جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم أرسم المنحني البياني لها :

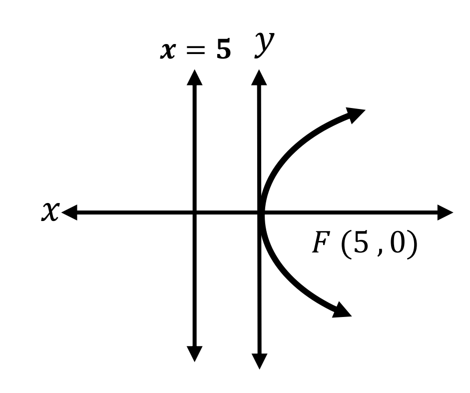
أ) البؤرة $(5,0)$ والرأس نقطة الاصل

الحل : البؤرة $(5,0)$ سينية موجبة (الفتحة نحو اليمين) :

$p=5 \Rightarrow x=-5$ معادلةالدليل

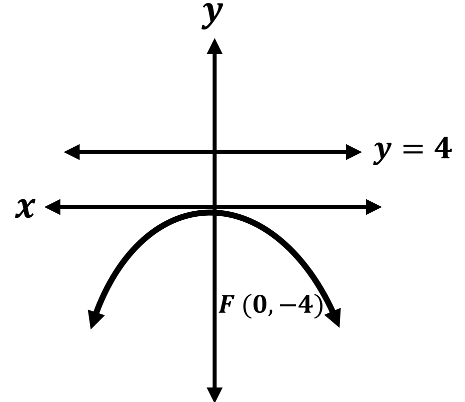
$y^2=4px \Rightarrow y^2=4(5)x \Rightarrow y^2=20x$

x	0	1	2	5
y	0	$\pm2\sqrt{5}$	$\pm2\sqrt{10}$	±10



ب) البؤرة $(0 , -4)$ صادية سالبة (الفتحة نحو الاسفل) :

الحل :



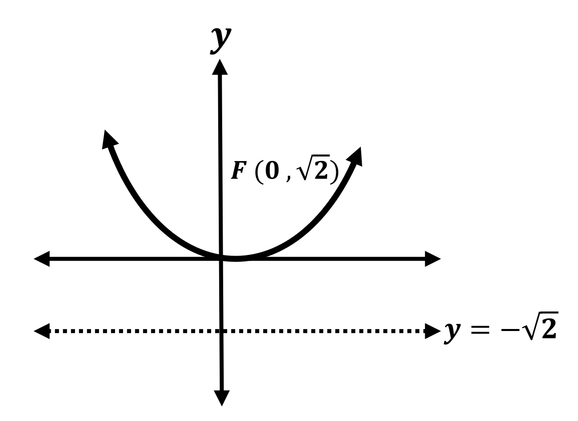
$p = 4 \Rightarrow y = 4$ معادلةالدليل

$x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(4)y \Rightarrow x^2 = -16\,y$

x	0	± 4	$\pm 4\sqrt{2}$
y	0	-1	-2

ج) البؤرة $(\sqrt{2} , 0)$ والرأس نقطة الاصل

الحل : البؤرة $(\sqrt{2} , 0)$ صادية موجبة (الفتحة نحو الأعلى) :



$p = \sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2}$ معادلة الدليل

$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{2}\,y$

x	0	$\pm 2\sqrt{\sqrt{2}}$	$\pm 2\sqrt{2}$
y	0	1	$\sqrt{2}$

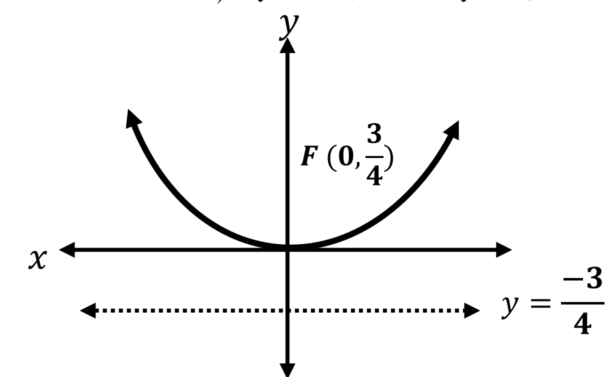
د) معادلة دليل القطع المكافئ $4y + 3 = 0$ والرأس في نقطة الاصل

الحل :

$4y + 3 = 0 \Longrightarrow 4y = -3 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$ معادلة الدليل

$y = -p \Longrightarrow p = \frac{3}{4} \Rightarrow F\left(0 , \frac{3}{4}\right)$ البؤرة

نلاحظ بأن البؤرة صادية موجبة (الفتحة نحو الأعلى) :



$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4(\frac{3}{4})\,y$

$\Rightarrow x^2 = 3\,y$

x	0	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{6}$
y	0	1	2

س2/ في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل والقطع المكافئ :

1) $x^2 = 4y$

$(x-0)^2 = 4(y-0)$ الفتحة نحو الاعلى

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$h = 0 \;,\; k = 0 \;, 4p = 4 \;\Rightarrow p = 1$

$F(0,p) = F(0,1)$ البؤرة

$V(h,k) = V(0,0)$ الرأس

$x = 0$ معادلة المحور $y = -1$ معادلة الدليل

2) $2x + 16y^2 = 0$

$y^2 = \frac{-1}{8}x \Rightarrow (y-0)^2 = \frac{-1}{8}(x-0)$ الفتحة نحو اليسار

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

$h = 0 \;,\; k = 0 \;,\; 4p = \frac{1}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{32}$

$F(-p,0) = F\left(-\frac{1}{32},0\right)$ البؤرة

$V(h,k) = V(0,0)$ الرأس

$y = 0$ معادلة المحور $x = \frac{1}{32}$ معادلة الدليل

3) $y^2 = -4(x-2)$

الحل : بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ نحصل على

$(y-0)^2 = -4(x-2)$ الفتحة نحو اليسار

$h = 2 \;,\; k = 0 \;,\; -4p = -4 \;\Rightarrow p = 1$

$\bar{F}(-p+h,k) = \bar{F}(-1+2,0) = \bar{F}(1,0)$ البؤرة

$\bar{V}(h,k) = \bar{V}(2,0)$ الرأس

$y = 0$ معادلة المحور

$\because\; x = p + h \;\Rightarrow x = 1 + 2 = 3$ معادلة الدليل

4) $(x-1)^2 = 8(y-1)$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ الفتحة نحو الاعلى

$h = 1 \;,\; k = 1 \;,\; 4p = 8 \;\Rightarrow p = 2$

$\bar{F}(h,p+k) = \bar{F}(1,3)$ البؤرة

$\bar{V}(h,k) = \bar{V}(1,1)$ الرأس

$x = 1$ معادلة المحور

$\because y = -p + k \quad \Rightarrow y = -2 + 1 = -1$ معادلة الدليل

5) $y^2 + 4y + 2x = -6$ وزاري ٢٠١٢ / د١

الحل : نرتب المعادلة بحيث تكون حدود y في طرف وحدود x في الطرف الآخر

$y^2 + 4y = -2x - 6$

نضيف 4 الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود y بشكل مربع كامل

$y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4$

$(y+2)^2 = -2x - 2$ الفتحة نحو اليسار

$(y+2)^2 = -2(x+1)$

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

$h = -1 \quad , \quad k = -2 \quad , \quad -4p = -2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$\overline{F}(-p+h\,,k) = \overline{F}\left(\frac{-3}{2}\,,-2\right)$ البؤرة

$\overline{V}(h\,,k) = \overline{V}(-1\,,-2)$ الرأس

$y = -2$ معادلة المحور

$\because x = p + h \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$ معادلة الدليل

6) $x^2 + 6x - y = 0$

الحل : نرتب المعادلة بحيث تكون حدود y في طرف وحدود x في الطرف الآخر

$x^2 + 6x = y$

نضيف 9 الى طرفي المعادلة حتى تكون حدود x بشكل مربع كامل

$x^2 + 6x + 9 = y + 9$

$(x+3)^2 = y + 9$ الفتحة نحو الاعلى

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$h = -3 \quad , \quad k = -9 \quad , \quad 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

$\overline{F}(h\,,p+k) = \overline{F}\left(-3\,,\frac{1}{4} - 9\right) = \overline{F}\left(-3\,,\frac{-35}{4}\right)$ البؤرة

$\overline{V}(h\,,k) = \overline{V}(-3\,,-9)$ الرأس

$x = -3$ معادلة المحور

$y = -p + k \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{4} - 9 = \frac{-1-36}{4} = \frac{-37}{4}$ معادلة الدليل

س3/ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,-5)$ ، $(2,5)$ والرأس في نقطة الاصل .

الحل : نلاحظ بأن الاحداثي السيني في النقطتين متساويتين وموجبتين فتكون المعادلة (سينية موجبة) :

النقطتان تحققان المعادلة $y^2 = 4px$

$$25 = 4p\,(2) \Rightarrow 25 = 8\,p \Rightarrow p = \frac{25}{8}$$

اي ان المعادلة هي : $y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \quad \Rightarrow \quad y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)\,x$

س4/ اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس في نقطة الاصل جد معادلة القطع المكافئ علما أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

الحل : البؤرة تنتمي لأحد المحورين اي أن هنالك أحتمالان :

البؤرة سينية	البؤرة صادية
معادلة الدليل $\because x = -3 \Rightarrow p = 3$ $\because\ y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(3)x$ $\Rightarrow y^2 = 12x$	معادلة الدليل $y = 4 \Rightarrow p = 4$ $x^2 = -4py \Rightarrow y^2 = -4(4)y$ $\Rightarrow x^2 = -16y$

س5/ قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر بالنقطة $(1,2)$ جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله ثم ارسم القطع .

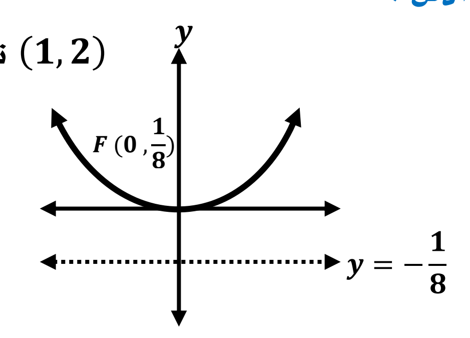
الحل :

$(1,2)$ تنتمي للقطع المكافئ فهي تحقق معادلته

$$A(1)^2 + 8(2) = 0 \Rightarrow A = -16$$

$$-16\,x^2 + 8y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}\,y$$

$$x^2 = 4py$$



نلاحظ بأن البؤرة صادية موجبة (الفتحة نحو الاعلى)

$$4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

البؤرة $F\,(0\,,p) \implies F\,(0\,,\frac{1}{8})$

معادلة الدليل $y = -\frac{1}{8}$

x	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	±1
y	0	1	2

س 6/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ :

١- البؤرة $(7\,,0)$ والرأس في نقطة الاصل :

الحل :

$p = 7 \Rightarrow x = -7$ معادلة الدليل

$MF = MQ$ تعريف القطع المكافئ

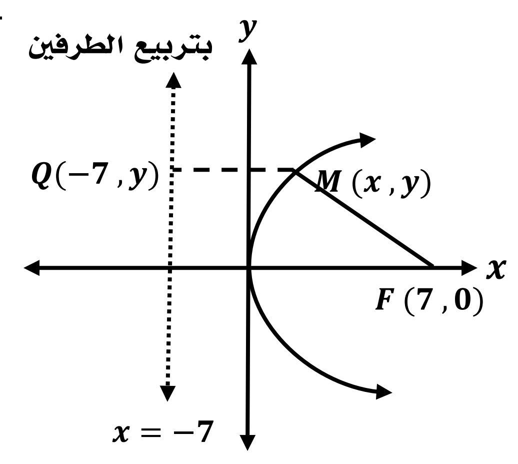
$\sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-y)^2}$ بتربيع الطرفين

$(x-7)^2 + (y-0)^2 = (x+7)^2$

$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49$

$-14x + y^2 = 14x$

$\boxed{y^2 = 28x}$ معادلة القطع المكافئ



٢- معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ والرأس في نقطة الاصل

$y = \sqrt{3} \quad , \quad y = p \Rightarrow y = \sqrt{3}$

$\therefore \; F(0\,,-p) = F\left(0\,,-\sqrt{3}\right)$ البؤرة

$MF = MQ$ تعريف القطع المكافئ

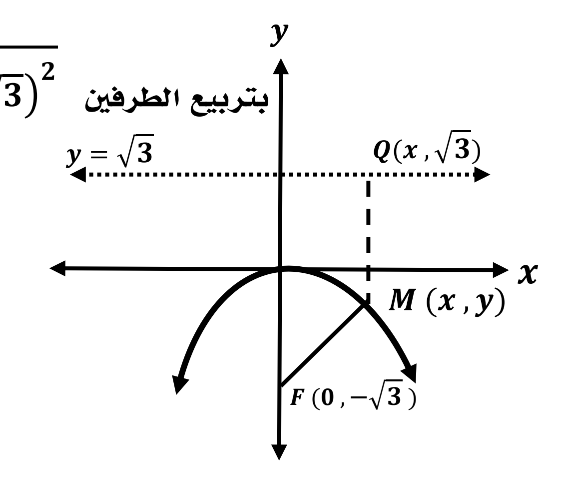
$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2}$ بتربيع الطرفين

$x^2 + \left(y+\sqrt{3}\right)^2 = \left(y-\sqrt{3}\right)^2$

$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$

$x^2 + 2\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}y$

$\boxed{x^2 = -4\sqrt{3}y}$ معادلة القطع المكافئ



قطع مكافئ
$pF_1 = pF_2$ باستخدام قانون المسافة
$(\sqrt{} = \sqrt{}\;)^2$
بالتربيع ترفع الجذور

أمثلة إضافية محلولة

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط $(-10 , -13) , (-10 , 11)$ والذي رأسه $(-1 , 2)$.

الحل : قيمة المحور الصادي للنقطتين ثابتة وهذا يدل على ان محور التماثل هو (x)

$$\therefore x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-13 + 11}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \Rightarrow x = -1$$

نلاحظ أن محور التماثل يوازي المحور الصادي وهذا يعني أن القانون هو $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$

$\therefore\ (x + 1)^2 = 4p\,(y - 2)$ صيغة معادلة القطع المكافئ

النقطة $(-10 , 11)$ ∋ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$(12)^2 = 4p\,(-12) \Rightarrow 12 = -4p \quad \Rightarrow p = -3$ الفتحة نحو الاسفل

$\therefore\ (x + 1)^2 = 4(-3)(y - 2) \Rightarrow \quad (x + 1)^2 = -12(y - 2)$ معادلة القطع المكافئ

مثال : النقط $(-12 , -6), (4 , -6), (0 , 0)$ تنتمي للقطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$ جد احداثي البؤرة ومعادلة الدليل والرأس والبعد البؤري .

الحل : $\because$ النقطة $(0 , 0)$ ∋ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$$0 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$\because$ النقطة $(4 , -6)$ ∋ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$$-6 = 16a + 4b + c\,]\ \div 2 \ \Rightarrow 8a + 2b = -3 \ldots\ldots (1)$$

$\because$ النقطة $(-12 , -6)$ ∋ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$$-6 = 144a - 12b\,]\ \div 6 \ \Rightarrow 24a - 2b = -1 \ldots\ldots (2)$$

نحل المعادلتين حلاً آنيا فنحصل على :

$$32a = -4 \Rightarrow a = \frac{-1}{8} \Rightarrow 8\left(\frac{-1}{8}\right) + 2b = -3 \Rightarrow -1 + 2b = -3 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

$\therefore y = \frac{-1}{8}x^2 - x \Rightarrow 8y = -x^2 - 8x \Rightarrow \ x^2 + 8x = -8y$ معادلة القطع المكافئ

باضافة (16) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود (x) بشكل مربع كامل

$$x^2 + 8x + 16 = -8y + 16 \ \Rightarrow \ (x + 4)^2 = -8y + 16 \ \Rightarrow \ (x + 4)^2 = -8(y - 2)$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(x - h)^2 = -4p(y - k)$ نحصل على

$h = -4 \quad , \quad k = 2 \ \Rightarrow \ \bar{V}(h , k) = \bar{V}(-4 , 2)$ الرأس

$\because\ -4p = -8 \Rightarrow p = 2 \ \Rightarrow F(h , -p + k) = F\,(-4 , -2 + 2) = F(-4 , 0)$ البؤرة

$\because x = h \ \Rightarrow x = -4$ معادلة المحور

$\because y = p + k \ \Rightarrow y = 2 + 2 \ \Rightarrow y = 4$ معادلة الدليل

$\therefore$ البعد البؤري $= 4p = 8$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويحقق الشروط التالية :

١) بؤرته $(5\,,0)$

الحل : ∵ البؤرة تنتمي لمحور السينات $x-axis \Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $y^2 = 4px$

$\because\ (p\,,0) = (5\,,0) \Rightarrow p = 5 \quad \therefore\ y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x \quad \forall\, x > 0$

٢) بؤرته $(0\,,3)$

الحل : ∵ البؤرة تنتمي لمحور الصادات $y-axis \Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $x^2 = 4py$

$\because\ (0\,,p) = (0\,,3) \Rightarrow p = 3 \quad \therefore\ x^2 = 4(3)x \Rightarrow x^2 = 12x \quad \forall\, y > 0$

٣) معادلة دليله $2y - 6 = 0$

الحل :

$\because 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow p = -3 \Rightarrow F(0\,,-3)$ البؤرة

$\therefore x^2 = -4py$

$x^2 = -4(-3)y \Rightarrow x^2 = 12y$ معادلة القطع المكافئ

٤) بؤرته تنتمي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\sqrt{2}\,,\frac{1}{2}\right)$

الحل : ∵ البؤرة تنتمي لمحور الصادات $y-axis \Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $x^2 = 4py$

∵ النقطة $\left(\sqrt{2}\,,\frac{1}{2}\right)$ تنتمي للقطع فهي تحقق معادلته

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4p\,\frac{1}{2} \Rightarrow 2 = 2p \Rightarrow p = 1$$

$\because\ x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4(1)y \Rightarrow x^2 = 4y$ معادلة القطع المكافئ

٥) يمر بالنقطتين $\left(1\,,-\sqrt{5}\right), \left(1\,,2\sqrt{5}\right)$ جد معادلته ومعادلة دليله .

الحل : ∵ النقطتين متناظرتان حول محور السينات (لأن قيمة x ثابتة لم تتغير) معادلته هي $y^2 = 4px$

∴ نعوض أحدى النقطتين لأنه يمر بها

$(2\sqrt{5})^2 = 4p\,(1) \Rightarrow 20 = 4p \Rightarrow p = 5 \Rightarrow x = -5$ معادلة الدليل

$\because\ y^2 = 4px = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$ معادلة القطع المكافئ

٦) بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(2\,,-4)$

الحل : ∵ البؤرة تنتمي لمحور السينات $\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $y^2 = -4px$

∵ دليله يمر بالنقطة $(2\,,-4)$ لذا فإن $x = 2$ هي معادلة القطع الدليل لأن الدليل يقطع الاحداثي السيني $p = -2$

$p = -2 \Rightarrow y^2 = -4px \Rightarrow y^2 = -4(-2)x \Rightarrow y^2 = 8x$ معادلة القطع المكافئ

٧) رأسه نقطة الاصل وبؤرته مركز الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$

الحل : مركز الدائرة $= \left(\frac{(-x\ \text{معامل})}{2}\,,\frac{(-y\ \text{معامل})}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}\,,\frac{-(-4)}{2}\right) = (0\,,2) =$ البؤرة

$\therefore p = 2$ والبؤرة تنتمي لمحور الصادات ومعادلة القطع المكافئ هي $x^2 = 4py$

$x^2 = 4py = 4(2)y \Rightarrow x^2 = 8x$ معادلة القطع المكافئ

٨) دليله يوازي المحور الصادي ومعادلة محوره $y = 0$ ويمر بالنقطة $(-2\,,1)$

الحل : ∵ الدليل يوازي المحور الصادي ويمر بالنقطة $(-2\,,1)$

∴ الدليل يقطع الاحداثي السيني السالب والبؤرة تقع على الاحداثي السيني والموجب

∴ معادلة القطع المكافئ هي $y^2 = 4px$

∵ القطع يمر بالنقطة $(-2\,,1)$ لذا فهي تحققه

$$\because\ y^2 = 4px \Rightarrow (1)^2 = 4p(-2) \Rightarrow 1 = -8p \Rightarrow p = \frac{-1}{8}$$

$\therefore\ y^2 = 4(\frac{-1}{8})x \Rightarrow y^2 = \frac{-1}{2}x$ معادلة القطع المكافئ

٩) يقطع من المستقيم $x = 4$ قطعة طولها (10) وحدات

الحل :

$\because 2\,y = 10 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (4\,,5)(4\,,-5)$ رأسي القطع المكافئ

∵ التناظر حول محور السينات ⟸ معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px$ والنقطة $(4\,,5)$ تحققه

$$y^2 = 4px \Rightarrow (5)^2 = 4p(4) \Rightarrow 25 = 16p \Rightarrow p = \frac{25}{16}$$

$$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(\frac{25}{16})x \Rightarrow y^2 = (\frac{25}{4})x$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويحقق الشروط التالية :

١- بؤرته الصيغة الديكارتية للعدد $z = \frac{-4+2i}{2-i}$

الحل :

$z = \frac{-4+2i}{2-i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{-8-4i+4i-2}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \Rightarrow (-2\,,0)$ الصيغة الديكارتية

$\therefore (-2\,,0) = (p\,,0)$ البؤرة $\Rightarrow p = -2$

$\therefore y^2 = 4px = 4(-2)x \Rightarrow y^2 = -8x$ معادلة القطع المكافئ

٢- بؤرته تنتمي لأحد المحورين ودليله يمر بالنقطة $(3\,,4)$

الحل : ∵ الدليل يمر بالنقطة $(3\,,4)$ ولم يحدد لأي المحورين يوازي ⟸ يوجد دليلان $p = 4\ ,p = 3$

∴ يوجد بؤرتانالأولى $(0\,,-4)$ والثانية $(-3\,,0)$ مما يعني قطعان مكافئان

$\therefore\ y^2 = -4px = -4\,(3)x \Rightarrow y^2 = -12x$ معادلة القطع المكافئ الأول

$\therefore\ x^2 = -4py = -4\,(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$ معادلة القطع المكافئ الثاني

٣- يمر برؤوس المثلث ABC حيث $A(0\,,0), B\,(-2\,,4), C\,(2\,,m)$ ثم أوجد قيمة m .

الحل : ∵ النقطة $(2\,,m)$ تقع أما في الربع الأول أو الرابع

⟸ النقطة $(2\,,m) \ni$ للربع الأول لكي يتحقق القطع

⟸ البؤرة تقع على المحور الصادي والقانون $x^2 = 4py$

∵ القطع يمر بالنقطة $(-2\,,4)$ فهي تحققه

$$\therefore (-2)^2 = 4p(4) \Rightarrow 4 = 16\,p \Rightarrow p = \frac{4}{16} \Rightarrow p = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 4py = 4\left(\frac{1}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = y$$

∵ النقطة $(2\,,m)$ تقع على القطع لذا فهي تحقق معادلة القطع

$$\therefore (2)^2 = m \Rightarrow m = 4$$

٤- رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $2y + \sqrt{3} = 0$

$$2y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2y = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\because \quad x^2 = 4py = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2\sqrt{3}y$ معادلة القطع المكافئ

واجبات

س١/ في كل مما يأتي جد البؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :

1) $y^2 = -8(x-2)$
2) $x^2 + 4x - y = 0$
3) $x^2 + 28y = 0$

س٢/ اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-2, 5)$ والرأس في نقطة الأصل فجد معادلته علما ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

س٣/ في كل مما يأتي جد معادلة القطع المكافئ الذي :

١. بؤرته $(-7, 0)$ والرأس في نقطة الاصل .

٢. معادلة الدليل له $2x - 3 = 0$ والرأس في نقطة الأصل .

٣. بؤرته تنتمي لمحور السينات ويمر بالنقطة $(3, 6)$ والرأس في نقطة الاصل .

٤. بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(-4, 5)$ والرأس في نقطة الأصل .

٥. معادلة الدليل له $2y + \sqrt{3} = 0$ والرأس في نقطة الأصل .

س٤/ اذا كانت النقطة $(2, 4)$ تنتمي للقطع المكافئ $y^2 = (a+4)x$ فجد قيمة(a) ثم جد أحداثي البؤرة ومعادلة الدليل .

س٥/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي :

١. بؤرته $(4, 0)$ والرأس في نقطة الأصل .

٢. معادلة الدليل له $y - 5 = 0$ والرأس في نقطة الأصل .

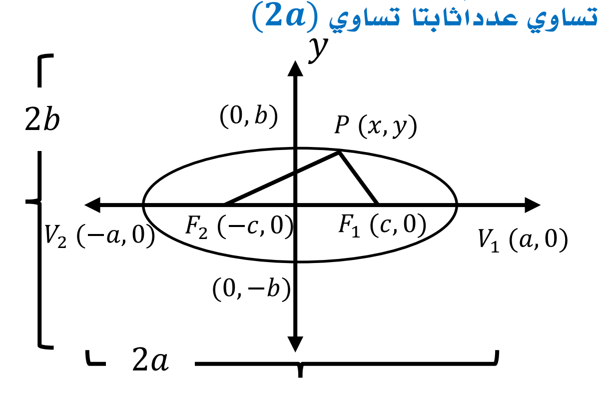
Ellipse القطع الناقص

القطع الناقص : هو مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (البؤرتان) تساوي عدداً ثابتا تساوي $(2a)$

$\because PF_1 + PF_2 = 2a$

البؤرتان على المحور السيني والمركز نقطة الاصل $O\ (0\ ,0)$

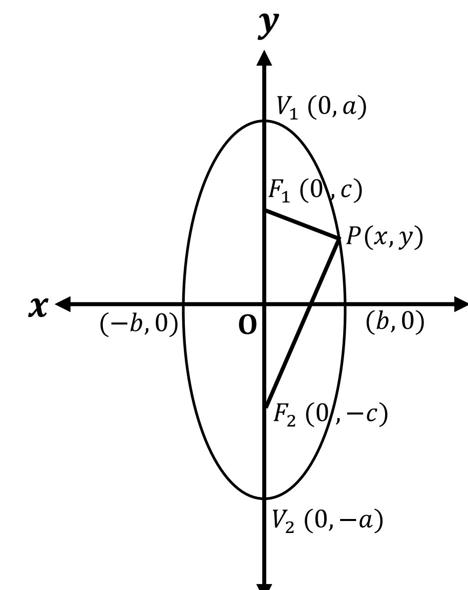
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



حيث أن $(a > c)\ ,(a > b)$

البؤرتان على المحور الصادي والمركز نقطة الاصل $O\ (0\ ,0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



اذا وقع المحور الكبير عن محور السينات فإن البؤرتان والرأسان هما على محور السينات .

جدول يبين مفردات القطع الناقص في الحالتين

القطع الناقص	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة
(أفقي)	$F_1(c,0)$ $F_2\ (-c,0)$	$V_1(a,0)$ $V_2\ (-a,0)$	$(0,b)$ $(0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(رأسي)	$F_1(0,c)$ $F_2(0,-c)$	$V_1(0,a)$ $V_2\ (0,-a)$	$(b,0)$ $(-b,0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

خواص القطع الناقص :

1) $a > b\ ,c$ حيث ان $(a\ ,b\ ,c > 0)$

2) $a > b\ ,c \Leftarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftarrow c^2 = a^2 - b^2$

3) طول المحور الكبير $= 2a$ (العدد الثابت)

4) طول المحور الصغير $= 2b$

5) المسافة بين البؤرتين $2c =$ (البعد البؤري)

6) مساحة القطع الناقص : $(A = ab\pi$ وحدة مربعة$)$

7) محيط القطع الناقص : $(P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ حيث $\pi = \frac{22}{7})$

8) الاختلاف المركزي: $(0 < e < 1)$ ، $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$ اي ان $c = \sqrt{a^2-b^2}$

9) النسبة بين طولي محوريه $= \frac{2a}{2b}$

10) اذا مر القطع بنقطة أحد احداثياتها صفر فالاحداثي الثاني هو أما (a) أو (b) والاكبر هو (a) والاصغر هو (b) .

ملاحظات :

1) اذا كان مقام الـ (x^2) أكبر فالبؤرتان سينيتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

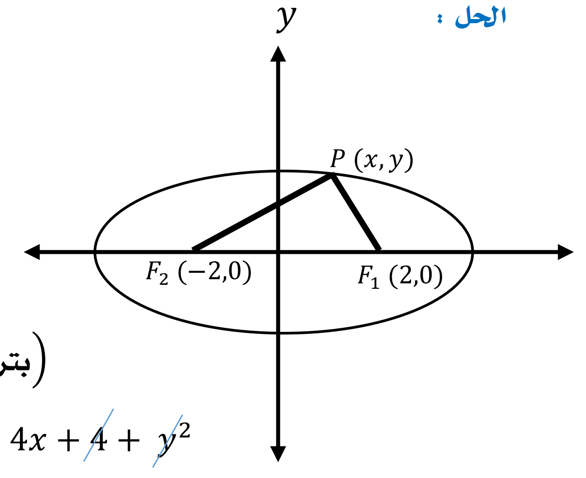
2) اذا كان مقام الـ (y^2) أكبر فالبؤرتان صاديتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

3) الطرف الايمن في معادلة القطع الناقص دائما $= 1$.

4) كل نقطة تنتمي الى القطع الناقص تحقق معادلة القطع .

مثال : باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت (6) .

الحل :



$P\ (x\,,y) \in$ القطع الناقص

$\therefore PF_1 + P\,F_2 = 2a$ (حسب التعريف)

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$ (بتربيع الطرفين)

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$[12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 36 + 8x\,] \div 4$$

$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 9 + 2x$$ (بتربيع الطرفين)

$$9(x^2 + 4x + 4 + y^2) = 81 + 36x + 4x^2$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 81 + 36x + 4x^2$$

$$5x^2 + 9y^2 = 45 \quad] \div 45$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ معادلة القطع الناقص

القطع الناقص
كمية ثابتة باستخدام قانون $pF_1 + pF_2 = 2a$
$\sqrt{\text{المسافة بين نقطة وبؤرته الاولى}} + \sqrt{\text{المسافة بين نفس النقطة وبؤرته الثانية}} = 2a$ انتبه الجذر لا يرفع كاملا

مثال : في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين وإحداثيات كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2) $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

الحل :

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \therefore V_1(5,0)\ , V_2(-5,0)$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$

$\therefore F_1(3,0)\ , F_2(-3,0)$ البؤرتان

$\therefore a = 5 \Rightarrow 2a = 10$ طول المحور الكبير

$\therefore b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ طول المحور الصغير

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$ الاختلاف المركزي

2) $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3} \quad \left(\times \frac{3}{4}\right)$

$\frac{12x^2}{4} + \frac{9y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{12}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$

$a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \quad , \quad b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

$2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ طول المحور الكبير

$2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ طول المحور الصغير

$\therefore V_1\left(0, \frac{2}{3}\right) \ , \ V_2\left(0, \frac{-2}{3}\right)$ الرأسان $\ , \ F_1\left(0, \frac{1}{3}\right) \ , \ F_2\left(0, \frac{-1}{3}\right)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} < 1$ الاختلاف المركزي

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)\ ,F_2(-3,0)$ ورأساه $V_1(5,0)\ ,V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل : ∴ البؤرتان والرأسان على المحور السيني فإن معادلة القطع الناقص

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$c=3 \Rightarrow c^2=9 \qquad a=5 \Rightarrow a^2=25$$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=25-b^2 \Rightarrow b^2=25-9=16 \qquad \therefore b=4$$

$$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

مثال : جد طول كل من المحورين وإحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي والمحيط والمساحة لمعادلة القطع الناقص $16x^2+25y^2=400$

الحل :

$$16x^2+25y^2=400\,]\ \div 400 \Longrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

$a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ (طول المحور الكبير)

$b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 2b=8$ (طول المحور الصغير)

$$c^2=a^2-b^2=25-16=9 \Rightarrow c=3$$

$F_1(3,0)\ ,\ F_2(-3,0)$ البؤرتان

$V_1(5,0)\ ,V_2(-5,0)$ الرأسان

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ الاختلاف المركزي

$A=ab\pi=(5)(4)\pi=20\pi$ وحدة مربعة

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ وحدة

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويقطع من محور السينات (8) وحدات ومن الصادات (12) وحدة ثم جد المسافة بين بؤرتيه ومساحة منطقته ومحيطه وأختلافه المركزي .

الحل : ما يقطعه من الصادات أكبر مما يقطعه من السينات فالبؤرتان صاديتان

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$$

$$2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ (معادلة القطع)

$$c^2=a^2-b^2=36-16=20 \Rightarrow c=2\sqrt{5}$$

$2c = 4\sqrt{5}$ (المسافة بين البؤرتين)

$A = ab\pi = 24\pi$ وحدة مربعة   المساحة

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{26}$ المحيط

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ الاختلاف المركزي

ملاحظة : نقاط تقاطع القطع مع المحورين $(0\,,y)\,,(x\,,0)$ تمثل الرؤوس والاقطاب والأبعد الى المركز هو الرأس.

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(0\,,3),(-4\,,0)$ ثم جد مساحته ومحيطه .

الحل :

$$a = 4 \quad , \quad b = 3 \quad \therefore \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

$A = ab\pi = (4)(3)\pi = 12\pi$ وحدة مربعة

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{16+9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}\pi$$

مثال : جد معادلة القطع الناقص إحدى بؤرتيه $(4\,,0)$ وإختلافه المركزي $(\frac{1}{2})$.

الحل : البؤرة سينية فالمعادلة هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$$
$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 64 - 16 = 48$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص إحدى بؤرتيه $(0\,,-3)$ والنسبة بين طولي محوريه $(\frac{4}{5})$

الحل : البؤرة صادية فالمعادلة هي :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$c = -3 \Rightarrow c^2 = 9$$
$$\frac{\text{طول المحور الصغير}}{\text{طول المحور الكبير}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4a}{5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{4a}{5}\right)^2 + 9$$
$$a^2 - \frac{16a^2}{25} = 9 \;\;] \times 25$$
$$25a^2 - 16a^2 = 225$$
$$9a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

نعوض قيمة (a) في معادلة (1)

$b = \frac{4(5)}{5} = 4 \Rightarrow b^2 = 16$ معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1}$

مثال : لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}\,, 0)$ جد قيمة (k).

الحل : نقسم طرفي المعادلة على (36) وزاري ٢٠١٥ / د١

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

البؤرة سينية معادلة القطع :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{k} \quad , \quad b^2 = 9 \quad , \quad c = \sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 3 = \frac{36}{k} - 9 \Rightarrow \frac{36}{k} = 3 + 9 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} = 3$$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات ، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة .

الحل : $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

الفرق بين طولي المحورين $2a - 2b = 2$ (بالقسمة على 2) $\Leftarrow a - b = 1 \Leftarrow a = b + 1$ (نبدأ بتعويض عن a)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(b+1)^2 = b^2 + 9$$

$$b^2 + 2b + 1 = b^2 + 9 \Rightarrow 2b + 1 = 9 \Rightarrow 2b = 9 - 1 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow a = 4 + 1$$

$a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$ معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

الحل :

من القطع المكافئ :

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4px$$

$4p = 12 \Rightarrow p = 3 \quad F(3\,,0)$ البؤرة

من القطع الناقص :

$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$ طول المحور الصغير

$F_1(3,0), \quad F_2(-3,0)$ البؤرتان $\Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 20x$ والنسبة بين طول محوره الصغير والبعد بين البؤرتين $\frac{4}{3}$.

الحل :

القطع المكافئ :

$y^2 = 4px$
$y^2 = 20x$
$4p = 20 \Longrightarrow p = 5 \Longrightarrow F\,(5\,,0)$

القطع الناقص :

$V_1(5,0)\ ,\ V_2(-5,0) \ \Longrightarrow a = 5$

$\frac{2b}{2c} = \frac{4}{3} \Longrightarrow \frac{b}{c} = \frac{4}{3} \Longrightarrow 3b = 4c \Longrightarrow c = \frac{3\,b}{4} \Longrightarrow c = 4$
$a^2 = b^2 + c^2$
$[25 = b^2 + \frac{9b^2}{16}] \times 16$
$400 = 16b^2 + 9b^2 \Longrightarrow 400 = 25b^2$
$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4 \Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحد بؤرتيه $(0\,,4)$ ومجموع مربعي طولي محوريه 136 .

الحل :

$(2a)^2 + (2b)^2 = 136$

$[4\,a^2 + 4\,b^2 = 136\ ] \qquad \div\ 4$

$a^2 + b^2 = 34 \Rightarrow a^2 = 34 - b^2 \quad \dots\dots\dots (1)$

$c\ = 4 \ \Rightarrow \quad c^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2 \ \Rightarrow 34 - b^2 = b^2 + 16 \Rightarrow -2b^2 = 16 - 34$

$-2b^2 = -18 \ \Rightarrow \ b^2 = \frac{-18}{-2} = 9$

$a^2 = 34 - 9 \ \Rightarrow \ a^2 = 25 \ \Rightarrow \ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \ \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرته نقطتان على محور السينات واحد بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالعددين 7 , 3 .

الحل :

$2a = 7 + 3$
$2a = 10 \ \Rightarrow \ a = 5 \qquad\qquad V_1(5,0)\,,\ V_2(-5,0)$

$2c = 7 - 3 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4 \qquad F_1(2,0)\,,\ F_2(-2,0)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ \Rightarrow 25 = b^2 + 4 \Rightarrow\ b^2 = 25 - 4 \Rightarrow\ b^2 = 21$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بالنقطتين $(2\,,2)$ $(3\,,\frac{\sqrt{6}}{2})$.

الحل : لان البؤرة تقع على محور السينات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بتعويض النقطة $(2\,,2)$ في المعادلة العامة :

$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \xrightarrow{(\times a^2b^2)} 4b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

بتعويض النقطة $(3\,,\frac{\sqrt{6}}{2})$ في المعادلة العامة

$[\frac{9}{a^2} + \frac{\frac{6}{4}}{b^2} = 1] \xrightarrow{(\times a^2b^2)} 9b^2 + \frac{6}{4}a^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots (2)$

$4b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots (1)$

$\mp 9b^2 \mp \frac{6}{4}a^2 = \mp a^2b^2 \ldots\ldots (2)$ بالطرح

$-5b^2 + \frac{10}{4}a^2 = 0$

$\left[\frac{10}{4}a^2 = 5b^2\right] \xrightarrow{(\times 4)} 10a^2 = 20b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{20b^2}{10} \Rightarrow a^2 = 2b^2$ نعوض في معادلة (1)

$4b^2 + 4(2b^2) = (2b^2)b^2 \Rightarrow\ 4b^2 + 8b^2 = 2b^4 \Rightarrow 12b^2 = 2b^4 \xrightarrow{\div 2b^2} b^2 = 6$

$a^2 = 2\,(6) \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1}$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة عن السؤال التالي : القطع يمر في النقطة $(3\,,0)$ هذه النقطة تقع على احد المحاور الاحداثية حيث النقطة $(3\,,0)$ تقع على المحور الاحداثي السيني لذلك هذه النقطة تمثل اما رأس القطع او القطب ، لذلك يجب ان ننتبه الى الملاحظة وهي يجب ان تكون $a > b\ ,\ \ a > c$. فمعادلة القطع المكافئ معلومة (نستخرج أولا البؤرة للقطع المكافئ وستكون بؤرة للقطع الناقص) .

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحد بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ ويمر بالنقطة $(3\,,0)$.

الحل :

القطع المكافئ :

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$-4p = -8 \Rightarrow\ p = \frac{-8}{-4} \Rightarrow p = 2\ \Rightarrow F(-2,0)$

القطع الناقص :

$V_1(3,0) \quad , \quad V_2(-3,0) \quad , F_1(2,0) \quad , \quad F_2(-2,0)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 \Longrightarrow b^2 = 5 \implies \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $2y^2 - 16x = 0$ ويمر بالنقطة $(0\,,-5)$.

الحل :

القطع المكافئ :

$[2y^2 - 16x = 0] \div 2$

$y^2 = 8x$

$y^2 = 4px \implies 4p = 8 \Longrightarrow p = 2 \implies F(2,0)$

القطع الناقص : لان النقطة تقع على غير محور البؤرة في القطع الناقص

$(0,-5)\,,(0\,,5)$ القطبين هما $\implies b = 5 \Longrightarrow b^2 = 25$

$F_1(2,0) \quad , \quad F_2(-2,0) \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow c^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 25 + 4 \Longrightarrow a^2 = 29 \implies \boxed{\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والمار ببؤرة القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$ والبعد بين بؤرتيه يساوي 6 وحدة طول .

الحل :

القطع المكافئ :

$x^2 = -12y$

$x^2 = -4py \Rightarrow -4p = -12 \Longrightarrow p = \frac{12}{4} = 3 \quad , \quad F(0,-3)$

القطع الناقص :

$2c = 6 \Longrightarrow c = 3 \Longrightarrow c^2 = 9$

نلاحظ ان قيمة $c = 3$ ولا يجوز ان تكون بدل قيمة a لان a اكبر من c لذلك تعتبر $(0\,,-3)$ هي b :

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 9 \Rightarrow \quad a^2 = 18$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \boxed{\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع المحورين الاحداثيين .

الحل : اذا مر القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل بنقطتي تقعان في ربعين متجاورين فان الرأس يمثل النقطة ذات المطلق الاكبر (أي يجرد العدد من الاشارة) والقطب يمثل النقطة ذات المطلق الاصغر .

اذا كانت $y = 0$

$$2x - (0) = 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$$

اذا كانت $x = 0$

$$2(0) - y = 8 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0,8)$$

$$a = 8 \Rightarrow a^2 = 64 \;,\; b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1}$$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور السينات حيث مساحة المنطقة لهذا القطع 24π .

الحل :

$$2x + 3y = 12 \Rightarrow 2x + 3(0) = 12 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6,0)$$

∵ المستقيم قطع الاحداثي السيني في النقطة $(6,0)$

$$V_1(6,0) \;,\; V_2(-6,0) \;,\; a = 6$$

$$A = ab\pi \;,\; 24\pi = 6b\pi \Rightarrow b = \frac{24\pi}{6\pi}$$

$(0,4) \;,\; (0,-4)$ الاقطاب $\Rightarrow b = 4$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 36 - 16 \Rightarrow c^2 = 20$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1}$$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = -24y$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$

الحل :

القطع المكافئ :

$$x^2 = -24y$$

$$x^2 = -4py \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow F(0,-6)$$

دليل القطع المكافئ :

$$y^2 = -4px$$

$$y^2 = -16x \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = \frac{16}{4} = 4$$

$(4,0)$ تنتمي للقطع الناقص

$$b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$$

البؤرتان $F_2(0,-6) \,,\, F_1(0,6)$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{52}=1}$ $\Leftarrow a^2 = 16+36 = 52 \Leftarrow a^2 = b^2 + c^2$

ملاحظات لرسم القطع الناقص :

١. نعين $V_1(a\,,0)\;,\;V_2\,(-a\,,0)$.
٢. نعين $M_1(0\,,b)\;,\;M_2\,(0\,,-b)$
٣. نصل بين النقاط الاربعة $V_1\;V_2\;\;M_1\;\;M_2$ بالترتيب حتى يكون منحني متصل .
٤. نعين البؤرتين $F_1(c\,,0)\;,\;F_2\,(-c\,,0)$

إنسحاب المحاور للقطع الناقص

درسنا في الامثلة السابقة القطع الناقص الذي يكون مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على إحدى المحاور الاحداثية، والآن سوف ندرس القطع الناقص بعد إنسحابه الى جهة معينة وسوف نرمز الى مركز القطع $(h\,,k)$ وهذا الجدول يلخص لنا جميع الحالات :

القطع الناقص	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المركز	المعادلة	القانون
	$\overline{F_1}(c+h,k)$ $\overline{F_2}(-c+h,k)$	$\overline{V_1}(a+h,k)$ $\overline{V_2}\,(-a+h,k)$	$(h,b+k)$ $(h,-b+k)$	$(h\,,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
	$\overline{F_1}(h,c+k)$ $\overline{F_2}(h,-c+k)$	$\overline{V_1}(h,a+k)$ $\overline{V_2}\,(h,-a+k)$	$(b+h,k)$ $(-b+h,k)$	$(h\,,k)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ملاحظة : معادلة المحور الكبير يؤخذ من البسط الذي مقامه أصغر ، والمحور الصغير يؤخذ من البسط الذي مقامه أكبر

فمثلاً :

معادلة المحور الكبير $\boxed{y=-7}$ ، معادلة المحور الصغير $\boxed{x=4}$

$$\frac{(x-4)^2}{100}+\frac{(y+7)^2}{64}=1$$

مثال : جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

الحل : البؤرتان سينيتان فالمعادلة هي :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$h=5\;\;,\;k=-4\;\;,\;a^2=25\;\Rightarrow a=5$

$b^2=16\;\Rightarrow b=4$

$c^2=a^2-b^2\;\Rightarrow\;c^2=25-16=9\;\Rightarrow\;c=3$

$\overline{F_1}(c+h,k)=\overline{F_1}\,(8,-4)$ البؤرتان

$\overline{F_2}(-c+h,k)=\overline{F_2}(2,-4)$

$\overline{V_1}(a+h,k)=\overline{V_1}\,(10\,,-4)$ الرأسان

$\overline{V_2}(-a+h,k)=\overline{V_2}(0\,,-4)$

طول المحور الكبير $2a=10$ وحدة

طول المحور الصغير $2b\ =\ 8$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y=\ -4$ اي ان $y=k$

معادلة المحور الصغير $x=5$ اي ان $x=h$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

مثال : جد البؤرتين والرأسين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$4x^2+9y^2-8x+36y=-4$

الحل : نرتب القطع بحيث تكون حدود (x) وحدود (y) مربع كامل وكما يلي

$x^2-8x+9y^2+36y=-4$

$4(x^2-2x)+9(y^2+4y)=-4$

نضيف الى طرفي المعادلة (40) اي ما اضفناه الى المربع الكامل للقوس الأول والقوس الثاني :

$(\frac{1}{2}\times 2)^2=1$ مربع نصف معامل x

$(\frac{1}{2}\times 4)^2=(2)^2=4$ مربع نصف معامل y

$4(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)=-4+40$

$[4(x-1)^2+9(y+2)^2=36]\div 36$

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

بالمقارنة بالمعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$

$h=1\quad ,k=\ -2\quad ,\quad a^2=9\ \Rightarrow a=3$

$b^2=4\ \Rightarrow b=2$

$c^2=a^2-b^2\ \Rightarrow\ c^2=9-4=5\ \Rightarrow\ c=\sqrt{5}$

البؤرتان على محور السينات

$\overline{F_1}(c+h,k)=\ \overline{F_1}\,(\sqrt{5}+1\,,-2)$

$\overline{F_2}(-c+h,k)=\ \overline{F_2}\,(-\sqrt{5}+1\,,-2)$

الرأسان

$\overline{V_1}(a+h,k)=\overline{V_1}\,(4\,,-2)$

$\overline{V_2}(-a+h,k)=\overline{V_2}(-2\,,-2)$

طول المحور الكبير $2a=6$ وحدة

طول المحور الصغير $2b\ =\ 4$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y=\ -2$

معادلة المحور الصغير $x=1$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

مراجعة

1. نرتب الحدودية
2. نجعل معامل $x^2\ ,\ y^2 = 1$
3. نجعل الطرف الايمن $= 1$
4. نقارن المعادلة مع المعادلة القياسية
5. مجموع طولي المحورين هو $2a + 2b$
6. الفرق بين طولي المحورين هو $2a - 2b$
7. النسبة بين طولي المحورين

- ❖ اذا كان البسط أكبر من المقام $\frac{2a}{2b}$
- ❖ اذا كان البسط أصغر من المقام $\frac{2b}{2a}$
- ❖ اذا كان مقام x^2 أكبر من مقام y^2 البؤرتان تقعان على المحور السيني x فإن المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
- ❖ اذا كان مقام y^2 أكبر من مقام x^2 البؤرتان تقعان على المحور الصادي y فإن المعادلة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

حل تمارين (2 – 2)

س1/ عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي :

1) $x^2 + 2y^2 = 1$

الحل :

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ بالمقارنة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \quad , \quad b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\ ,F_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ البؤرتان على محور السينات

$\therefore\ V_1(1,0)\ ,V_2(-1,0)$ الرأسان

$\therefore\ P_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,P_2\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ القطبان (طرفا المحور الصغير)

$2a \Rightarrow 2\,(1) = 2$ طول المحور الكبير

$2b \Rightarrow 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ طول المحور الصغير

$2c = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ المسافة بين البؤرتين

المركز $(0\,,0)$, معادلة المحور الصغير $x = 0$, معادلة المحور الكبير $y = 0$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

2) $9x^2 + 13y^2 = 117$

الحل : بالقسمة على 117

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 13 - 9 = 4 \Rightarrow c = 2$

$\therefore F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$ البؤرتان على محور السينات

$\therefore V_1(\sqrt{13},0)$, $V_2(-\sqrt{13},0)$ الرأسان

$\therefore P_1(0,3)$, $P_2(0,-3)$ القطبان

$2a \Rightarrow 2(\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$ طول المحور الكبير

$2b \Rightarrow 2(3) = 6$ طول المحور الصغير

$2c = 2(2) = 4$ المسافة بين البؤرتين

$y = 0$ معادلة المحور الكبير , $x = 0$ معادلة المحور الصغير , $(0,0)$ المركز

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}} < 1$$

3) $\frac{(x-4)^2}{81} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

الحل : بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$h = 4$, $k = -1$, $(h,k) = (4,-1)$, $a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$, $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

$c^2 = a^2 - b^2 = 81 - 25 = 56 \Rightarrow c = 2\sqrt{14}$

$\bar{F}_1(c+h,k) = \bar{F}_1(2\sqrt{14}+4,-1)$ البؤرتان على محور السينات

$\bar{F}_2(-c+h,k) = \bar{F}_2(-2\sqrt{14}+4,-1)$

$\bar{V}_1(a+h,k) = \bar{V}_1(13,-1)$ الرأسان

$\bar{V}_2(-a+h,k) = \bar{V}_2(-5,-1)$

$\bar{P}_1(h,b+k) = \bar{P}_1(4,4)$ القطبان

$\bar{P}_2(h,-b+k) = \bar{P}_2(4,-6)$

$2a = 2(9) = 18$ وحدة طول المحور الكبير

$2b = 2(5) = 10$ وحدة طول المحور الصغير

$2c = 2(2\sqrt{14}) = 4\sqrt{14}$ وحدة المسافة بين البؤرتين

$y = -1$ معادلة المحور الكبير

$x = 4$ معادلة المحور الصغير

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{14}}{9} < 1$$

4) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ وزاري ٢٠١٣ / د١

الحل : بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

$h = -3 \quad , \quad k = -2 \quad , \quad a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5 \quad , \quad b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

$\bar{F}_1(h, c+k) = \bar{F}_1(-3, 2)$ البؤرتان على محور السينات

$\bar{F}_2(h, -c+k) = \bar{F}_2(-3, -6)$

$\bar{V}_1(h, a+k) = \bar{V}_1(-3, 3)$ الرأسان

$\bar{V}_2(h, -a+k) = \bar{V}_2(-3, -7)$

$\bar{P}_1(h+b, k) = \bar{P}_1(0, -2)$ القطبين

$\bar{P}_2(h-b, k) = \bar{P}_2(-6, -2)$

$2a = 2(5) = 10$ وحدة طول المحور الكبير

$2b = 2(3) = 6$ وحدة طول المحور الصغير

$2c = 2(4) = 8$ وحدة المسافة بين البؤرتين

$y = -2$ معادلة المحور الصغير

$x = -3$ معادلة المحور الكبير

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$$

5) $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$

الحل : نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (x) وحدود (y) مربع كامل وكما يلي :

$x^2 + 25y^2 + 4x - 150y = -204 \Longrightarrow (x^2 + 4x) + 25(y^2 - 6y) = -204$

مربع نصف معامل x $\quad (\frac{1}{2} \times 4)^2 = (2)^2 = 4$

مربع نصف معامل y $\quad (\frac{1}{2} \times 6)^2 = (3)^2 = 9$

باضافة (229) الى طرفي معادلة القطع الناقص حتى تكون حدود (x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$(x^2 + 4x + 4) + 25(y^2 - 6y + 9) = -204 + 229$

$(x+2)^2 + 25(y-3)^2 = 25\ ] \div (25)$

$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$ نحصل على :

مركز القطع الناقص $h=-2 \quad , \quad k=3 \quad \Longrightarrow (h\,,k)=(-2\,,3)$

$a^2=25 \Longrightarrow a=5 \quad , \quad b^2=1 \Longrightarrow b=1$

$c^2= a^2-b^2=25-1=24 \Longrightarrow c=2\sqrt{6}$

البؤرتان على محور السينات $\bar{F}_1(c+h\,,k)=\bar{F}_1(2\sqrt{6}-2,3)$

$\bar{F}_2(-c+h\,,k)=\bar{F}_2(-2\sqrt{6}-2,3)$

الرأسان $\bar{V}_1(a+h\,,k)=\bar{V}_1(3\,,3)$

$\bar{V}_2(-a+h\,,k)=\bar{V}_2(-7,3)$

القطبان $\bar{P}_1(h\,,b+k)=\bar{P}_1(-2,4)$

$\bar{P}_2(h\,,-b+k)=\bar{P}_2(-2,2)$

طول المحور الكبير $2a=2(5)=10$ وحدة

طول المحور الصغير $2b=2(1)=2$ وحدة

المسافة بين البؤرتين $2c=2(2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y=3$

معادلة المحور الصغير $x=-2$

س2/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل في كل مما يأتي :

١- البؤرتان هما النقطتان $(5\,,0)$ و $(-5\,,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة

الحل : البؤرتان سينيتان ومعادلة القطع :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$c=5 \Rightarrow c^2=25$

$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

$c^2= a^2- b^2$

$25=36- b^2 \Rightarrow b^2=11$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1}$

٢- البؤرتان هما $(0\,,\pm2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm4$

الحل : البؤرتان صاديتان ومعادلة القطع :

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

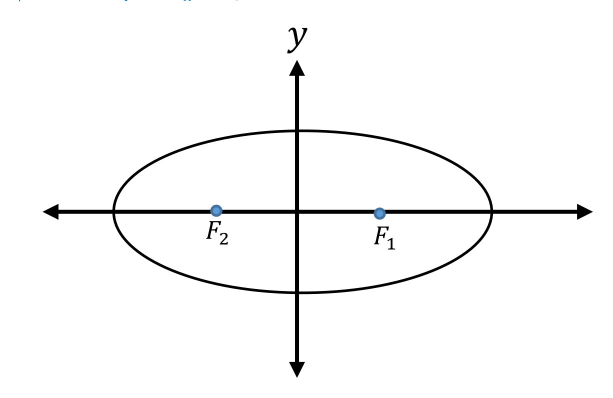
$c=2 \Rightarrow c^2=4$

$b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20 \Longrightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1}$ معادلة القطع الناقص

٣- أحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5 , 1 وحدة على الترتيب

الحل : مثل هذا السؤال يحل باستخدام الرسم



$2a = 5 + 1 = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$2c = 5 - 1 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$

$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 5$

∴ هناك حالتين لمعادلة القطع الناقص وهما :

اذا كانت البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع هي $\boxed{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1}$

اذا كانت البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع هي $\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$

٤- إختلافه المركزي يساوي $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طول

الحل : لم يحدد موقع البؤرتين فنكتب معادلتين

$\because e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a^2 = 4c^2$

$\because 2b = 12 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow b^2 = 36$

$\because c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 4c^2 - 36 \Rightarrow 3c^2 = 36 \Rightarrow c^2 = 12$

$a^2 = 4(12) \Rightarrow a^2 = 48$

اذا كانت البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع هي $\boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1}$

اذا كانت البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع هي $\boxed{\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1}$

المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدات

الحل : لم يحدد موقع البؤرتين

$2c = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$\frac{1}{2}(2b) = 3 \Longrightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow \quad a^2 = 25$$

اذا كانت البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

اذا كانت البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

س3/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم :

١- بؤرتاه النقطتان $(0\,,\pm 2)$ ورأساه النقطتان $(0\,,\pm 3)$ ، ومركزه نقطة الأصل

الحل :

$\because c = 2 \quad , \quad a = 3$

$pF_1 + pF_2 = 2a$ حسب التعريف

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = 2\,(3)$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 6$$

$[\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6 - \sqrt{x^2 + (y+2)^2}]^2$ بتربيع الطرفين

$$(x^2 + y^2 - 4y + 4) = (36 - 12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + x^2 + y^2 + 4y + 4)$$

$(12\sqrt{x^2 + (y+2)^2}) = 36 + 8y$ نقسم على 4

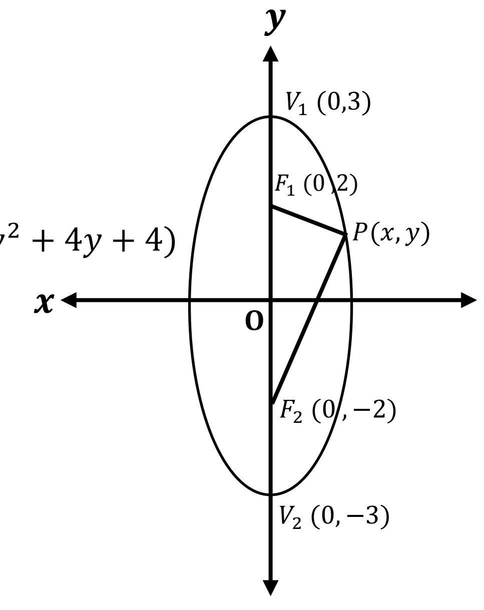
$3\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 9 + 2y$ بتربيع الطرفين

$$9[x^2 + (y+2)^2] = (9 + 2y)^2$$

$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9\,x^2 + 9\,y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 5\,y^2 = 45 \Longrightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$



٢- المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه في نقطة الاصل .

الحل :

$\because 2c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad (\pm 3\,,0)$ البؤرتان

$\because 2a = 10 \Rightarrow \quad a = 5 \quad \Rightarrow \quad (\pm 5\,,0)$ الرأسان

$\therefore PF_1 + P\,F_2 = 2a$ (حسب التعريف)

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 2\,(5)$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2-6x+9+y^2=100-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}+x^2+6x+9+y^2$$

$$[20\sqrt{(x+3)^2+y^2}=100+12x \quad]\div 4$$

$$5\sqrt{(x+3)^2+y^2}=25+3x$$ (بتربيع الطرفين)

$$25(x^2+6x+9+y^2)=625+150x+9x^2$$

$$25x^2+150x+225+25y^2=625+150x+9x^2$$

$$16x^2+25y^2=625-225$$

y, $P\,(x,y)$, $V_2\,(-5,0)$, $F_2\,(-3,0)$, $F_1\,(3,0)$, $V_1\,(5,0)$

$$16x^2+25y^2=400\,]\div(400)\Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$$ معادلة القطع الناقص

س4/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علما بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}\,,\sqrt{3})$

الحل : القطع المكافئ :

$$y^2=-8x$$
$$y^2=-4xp \Longrightarrow -4p=-8 \Rightarrow p=2 \quad \Rightarrow (-2\,,0)$$ البؤرة

بؤرة القطع المكافئ $F\,(-2\,,0)$ وهي تمثل احدى بؤرتي القطع الناقص (سينية) $F\,(-2\,,0)$

القطع الناقص :

$$F_1\,(2\,,0)\ ,\ F_2\,(-2\,,0)\,,\ c=2 \Rightarrow c^2=4$$
$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=b^2+4 \ldots\ldots(1)$$

$(2\sqrt{3}\,,\sqrt{3})$ تنتمي للقطع الناقص فهي تحقق معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{12}{b^2+4}+\frac{3}{b^2}=1\ ]\times b^2(b^2+4)$$

$$12b^2+3b^2+12=b^2(b^2+4)$$

$$15b^2+12=b^4+4b^2$$

$$b^4-11b^2-12=0$$

$$(b^2-12)(b^2+1)=0$$

$$either\ \ b^2=12 \Rightarrow a^2=12+4=16 \quad (1)$$ نعوض في معادله

$$or\quad b^2=-1$$ تهمل ، $$\boxed{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1}$$ معادلة القطع الناقص

س5/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3\,,4)\,,\ (6\,,2)$.

الحل : البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع الناقص هي $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$(6\,,2)$ تنتمي للقطع الناقص فهي تحقق معادلته : $\frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \ldots\ldots(1)$

$(3\,,4)$ تنتمي للقطع الناقص فهي تحقق معادلته : $\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \ldots\ldots(2)$

$$\frac{144}{a^2}+\frac{16}{b^2}=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\mp\frac{9}{a^2}\mp\frac{16}{b^2}=\mp 1$$ بالطرح $\ldots\ldots(2)$

$$\frac{135}{a^2}=3 \Rightarrow a^2=45$$

نعوض قيمة a^2 في المعادلة (1)

$$\frac{36}{45}+\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{b^2}=1-\frac{36}{45} \Rightarrow \frac{4}{b^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow b^2=20$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1}$

س6/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

الحل : $\because$ المنحني $x^2+y^2-3x=16$ يقطع المحور الصادي فإن $x=0$

$$0+y^2-3(0)=16 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow (0\,,4),(0\,,-4)$$

وتمثلان بؤرتي القطع الناقص (فتكون معادلته صادية) : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$$c=4 \Rightarrow c^2=16$$

لإيجاد معادلة الدليل للقطع المكافئ :

$$y^2=12x$$
$$y^2=4px \Rightarrow 4p=12 \Rightarrow p=3$$

$x=-3$ معادلة الدليل $\Rightarrow (-3\,,0)$ نقطة التماس

معادلة القطع الناقص صادية ومعادلة القطع المكافئ سينية ، وبما ان النقطة $(-3\,,0)$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها .

$$\frac{(-3)^2}{b^2}+\frac{(0)^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=9$$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=9+16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$ معادلة القطع الناقص

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2) .

الحل :

القطع المكافئ :

لإيجاد نقطتا تقاطع القطع الناقص مع القطع المكافئ : $x=-2$

$$y^2+8(-2)=0 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow (-2,-4),(-2,4)$$

القطع الناقص :

البؤرتان تنتمي لمحور السينات معادلة القطع $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$$2a=2(2b) \Rightarrow a=2b \Rightarrow a^2=4b^2$$

النقاط تنتمي للقطع الناقص (اي تحقق معادلته) :

$$\frac{(-2)^2}{4b^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=17$$

$$a^2=4(17) \Rightarrow a^2=68 \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1}$$ معادلة القطع الناقص

س8/ قطع ناقص $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من h,k ؟

الحل : القطع المكافئ :

نلاحظ بأن معادلة القطع المكافئ سينية موجبة :

$$y^2=4px$$
$$y^2=4\sqrt{3}x \Rightarrow p=\sqrt{3}$$

بؤرة القطع المكافئ $F(\sqrt{3},0)$ وهي تمثل أحدى بؤرتي القطع الناقص (فتكون معادلته السينية)

القطع الناقص :

$$hx^2+ky^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{h}}+\frac{y^2}{\frac{36}{k}}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad c=\sqrt{3} \Rightarrow c^2=3$$

مجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) :

$$(2a)^2+(2b)^2=60$$
$$4a^2+4b^2=60$$
$$a^2+b^2=15 \Rightarrow b^2=15-a^2$$
$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow a^2=15-a^2+3$$

$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 15 - 9 = 6$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1}$

بالمقارنة : $\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = 4 \quad , \quad \frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = 6$

س9/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة . وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

القطع المكافئ :

$x^2 = 4py$
$x^2 = 24y \quad 4p = 24 \Rightarrow p = 6$

بؤرة القطع المكافئ $F\ (0\ ,6)$ وهي تمثل إحدى بؤرتي القطع الناقص (صادية)

القطع الناقص :

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \quad c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

مجموع طولي محوريه (36) :

$2a + 2b = 36 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow a = 18 - b$
$a^2 = b^2 + c^2$
$(18 - b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 324 - 36b + b^2 = b^2 + 36$
$36b = 324 - 36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = \frac{288}{36} = 8 \Rightarrow a = 18 - 8 = 10$
$\therefore b^2 = 64 \quad , \quad a^2 = 100$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1}$

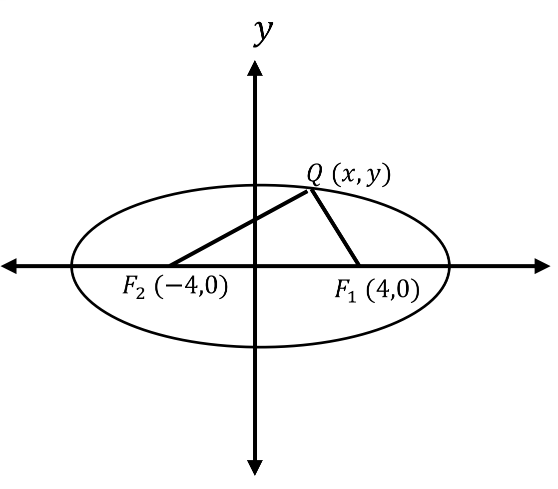
س10/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(4\ ,0)\ ,F_2(-4\ ,0)$ والنقطة Q ينتمي للقطع الناقص بحيث أن محيط المثلث $Q\ F_1F_2$ يساوي (24) وحدة . وزاري ٢٠١٤ / د١

الحل : البؤرتان سينيتان ومعادلة القطع :

$\because\ F_2(-4\ ,0)\ ,F_1(4\ ,0)$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \quad c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

محيط المثلث = مجموع أضلاعه الثلاثة



$$\underbrace{Q\,F_1 + QF_2}_{2a} + \underbrace{F_1F_2}_{2c} = 24$$

$F_1F_2 = 2c = 2\,(4) = 8$ المسافة بين البؤرتين

$Q\,F_1 + QF_2 = 2a$ حسب تعريف القطع الناقص

$2a + 8 = 24 \Rightarrow 2a = 24 - 8 \Rightarrow 2a = 16$

$a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 48$

$\boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$ معادلة القطع الناقص

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومساحته 24π والنسبة بين طول محوريه $\frac{3}{8}$.

الحل :

$A = ab\pi \Longrightarrow 24\pi = ab\pi \Longrightarrow a = \frac{24}{b}$

$\frac{2a}{2b} = \frac{3}{8} \Longrightarrow 3a = 8b \Longrightarrow a = \frac{8b}{3} \Longrightarrow \frac{24}{b} = \frac{8b}{3} \Longrightarrow 8b^2 = 72 \Longrightarrow b^2 = 9$

$\therefore b = 3 \Longrightarrow a = \frac{24}{b} = \frac{24}{3} = 8$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(x^2 - 12y = 0)$ وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير

الحل : من القطع المكافئ :

$x^2 = 4ay$

$x^2 = 12y \Longrightarrow 4p = 12 \Longrightarrow p = 3 \Longrightarrow (0\,,3)$ البؤرة

من القطع الناقص :

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Longleftarrow \quad c = 3 \Longleftarrow (0\,,3)\,,(0\,,-3)$ البؤرتان

$\because a = 2b \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow (2b)^2 = b^2 + 9 \Longrightarrow 4b^2 = b^2 + 9 \Longrightarrow 3b^2 = 9 \Longrightarrow b^2 = 3$

$\therefore a^2 = 4b^2 = 4\,(3) = 12 \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة $(0 , 3)$ والمسافة بين بؤرتيه 6 وحدات .

الحل :

$\because 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$\because a > c \quad \Rightarrow b = 3$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 9 \Rightarrow a^2 = 18$

$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ معادلة القطع الناقص الأولى or $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص الثانية

مثال : لتكن $Mx^2 + Ny^2 = 400$ معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(3 , 0)$ والنسبة بين طول محوره الكبير ومحوره الصغير $= \frac{4}{5}$ فجد قيم كل من $M , N \in R$

الحل :

$Mx^2 + Ny^2 = 400 \ ] \div 400 \Rightarrow \frac{Mx^2}{400} + \frac{Ny^2}{400} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{400}{M}} + \frac{y^2}{\frac{400}{N}} = 1$

$\because$ البؤرة تنتمي لمحور السينات فإن $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = \frac{400}{M} \quad , \quad b^2 = \frac{400}{N} \quad , \quad c = 3$

$\because \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4}{5}a \Rightarrow b^2 = \frac{16}{25}a^2$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left[a^2 = \frac{16}{25}a^2 + 9\right] \times 25$

$25a^2 = 16a^2 + 225 \Rightarrow 9a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = 25 \quad , \quad b^2 = 16$

$M = \frac{400}{a^2} = \frac{400}{25} = 16$

$N = \frac{400}{b^2} = \frac{400}{16} = 25$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته 80π والذي يكون البعد بين بؤرتيه مساويا للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $(y^2 + 24x = 0)$ ودليله .

الحل : القطع المكافئ

$y^2 = 4px$

$y^2 = -24x$

$\therefore 4p = -24 \Rightarrow p = -6 \Rightarrow |2p| = 12$

$2c = 12 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

القطع الناقص

$A = ab\pi \Rightarrow 80\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 80 \Rightarrow b = \frac{80}{a} \Rightarrow b^2 = \frac{6400}{a^2}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36 \xrightarrow{(\times a^2)} a^4 = 6400 + 36a^2$

$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0 \Rightarrow (a^2 - 100)(a^2 + 64) = 0$

$either \; a^2 = 100 \quad \Rightarrow b^2 = \frac{6400}{100} = 64$

$or \quad b^2 = -64$ يهمل

معادلة القطع الناقص الثاني $\therefore \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1}$ معادلة القطع الناقص الأول $\therefore \boxed{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1}$

مثال : اذا كانت $\frac{y^2}{3M-2} - x = 0$ معادلة قطع مكافيء دليله يمر بالنقطة $(-1\,,2)$ جد معادلة القطع الناقص الذي أحد بؤرتيه $(0\,,M)$ ومربع طول النسبة بين محوريه $= \frac{3}{4}$.

الحل : من القطع المكافئ : نلاحظ ان القطع المكافئ من النوع السيني لذا فإن معادلة الدليل له

$x = -p = -(-1) \Rightarrow x = 1$ لأنه يقع على المحور السيني

$y^2 = (3M - 2)x$

$y^2 = 4px \Rightarrow 3M - 2 = 4p \Rightarrow 3M - 2 = 4 \Rightarrow M = 2$

من القطع الناقص : بؤرتاه $(0\,,2)\,,(0\,,-2)$ والقانون $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\because \frac{4b^2}{4a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad , \quad c^2 = 4$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}a^2 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a^2 = 3a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 16 \quad , \; b^2 = 12$

معادلة القطع الناقص $\therefore \boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه $F_1(-\sqrt{6}\,,0)\,,\; F_2(\sqrt{6}\,,0)$ ويمر خلال بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x + 2y - 11 = 0$

الحل : من القطع المكافئ :

نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (y) في طرف وحدود (x) في الطرف الآخر $y^2 + 2y = 12x + 11$

نضيف (1) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود (y) بشكل مربع كامل .

$y^2 + 2y + 1 = 12x + 11 + 1 \Rightarrow (y + 1)^2 = 12x + 12 \Rightarrow (y + 1)^2 = 12(x + 1)$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ نحصل على

$h = -1 \quad , \quad k = -1 \Rightarrow (h\,,k) = (-1\,,-1)$ الرأس

$\because 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F(p + h\,,k) = F(3 - 1\,,-1) = F\,(2\,,-1)$

من القطع الناقص :

$\because$ بؤرتي القطع الناقص $(-\sqrt{6}\,,0)\,,(\sqrt{6}\,,0)$ فإن $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad c^2 = 6$

$\therefore$ النقطة $(2\,,-1)$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها (بؤرة القطع المكافئ)

$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \xrightarrow{(\times a^2\, b^2)} 4b^2 + a^2 = a^2b^2 \quad \ldots..(1)$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$4b^2 + b^2 + 6 = (b^2 + 6)b^2 \Rightarrow 5b^2 + 6 = b^4 + 6b^2 \Rightarrow b^4 + b^2 - 6 = 0$

$(b^2 + 3)(b^2 - 2) = 0$

$either \quad b^2 = 2 \quad \Rightarrow a^2 = 8$

$or \qquad b^2 = -3$ يهمل

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد احداثي البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين ومقدار الاختلاف المركزي ومعادلة القطع الناقص الذي مركزه $(1 , -4)$ ومحوره الكبير يوازي محور الصادات وإحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالبعدين $2 , 10$ وحدة طول .

الحل : $\because$ مجموع البعدين $= 2a$ والفرق بين البعدين $= 2c$

$2a = 2 + 10 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \quad , \quad 2c = 10 - 2 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$

$\because$ محوره الكبير يوازي محور الصادات فإن المعادلة القياسية للقطع الناقص $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b^2 = 20 \; , h = 1 \; , k = -4$

$\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$

المسافة بين البؤرتين $2c = 2\,(4) = 8$ وحدة

معادلة المحور الكبير $x = h \Rightarrow x = 1$, معادلة المحور الصغير $y = k \Rightarrow y = -4$

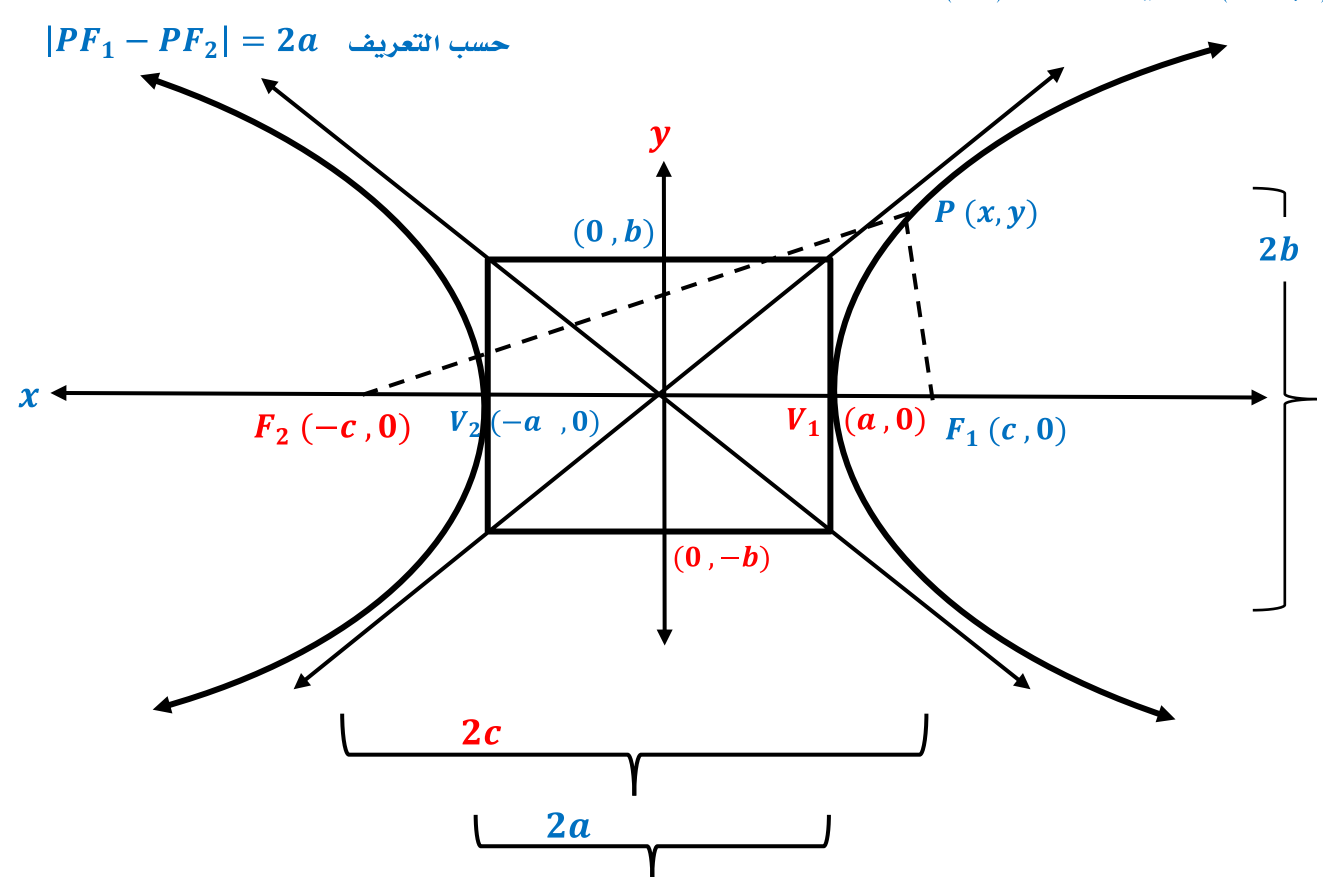
البؤرتان $\overline{F}_1(h , k + c) = \overline{F}_1(1 , 0) \quad , \quad \overline{F}_2(h , k - c) = \overline{F}_2(1 , -8)$

الرأسان $\overline{V}_1(h , k + a) = \overline{V}_1(1 , 2) \quad , \quad \overline{V}_2(h , k - a) = \overline{V}_2(1 , -10)$

القطع الزائد Hyperbola

القطع الزائد : هي مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتا $(2a)$.

حسب التعريف $|PF_1 - PF_2| = 2a$



معادلة قطع زائد بؤرتاه سينيتان والمركز نقطة الاصل

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادلة قطع زائد بؤرتاه صاديتان والمركز نقطة الاصل

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

جدول يبين مفردات القطع الزائد في الحالتين :

القطع الزائد	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة
)(	$F_1\,(c\,,0)$ $F_2\,(-c\,,0)$	$V_1\,(a\,,0)$ $V_2\,(-a\,,0)$	$(0\,,b)$ $(0\,,-b)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
︶︵	$F_1\,(0\,,c)$ $F_2\,(0\,,-c)$	$V_1\,(0\,,a)$ $V_2\,(0,-a)$	$(b\,,0)$ $(-b\,,0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ملاحظات :

1) دائما $c > a , b$ ، $a , b , c > 0$

2) طول المحور الحقيقي $= 2a$ (العدد الثابت)

3) طول المحور التخيلي $= 2b$ (المحور المرافق)

4) المسافة بين البؤرتين $= 2c$ (البعد البؤري)

5) الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} > 1$

6) $c^2 = a^2 + b^2$

7) اذا كانت إشارة الـ (x^2) موجبة فالقطع الزائد بؤرتاه سينيتان .

8) اذا كانت إشارة الـ (y^2) موجبة فالقطع الزائد بؤرتاه صاديتان .

مثال : عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

الحل :

طول المحور الحقيقي $\because a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 16$ وحدة

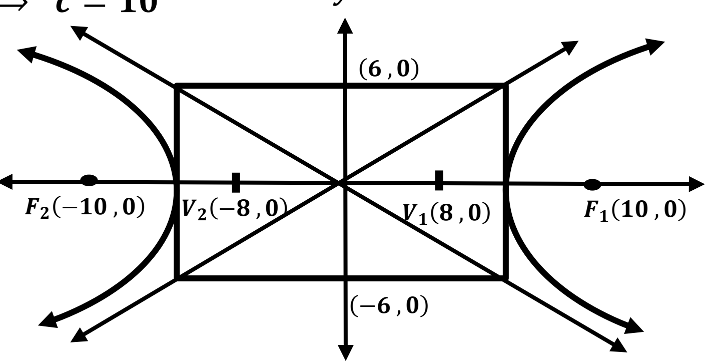
طول المحور المرافق $\because b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$ وحدة

$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$

رأسا القطع الزائد $V_1(8,0)$, $V_2(-8,0)$

قطبا القطع الزائد $P_1(0,6)$, $P_2(0,-6)$

بؤرتا القطع الزائد $F_1(10,0)$, $F_2(-10,0)$



مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرفق (4) وحدات وبؤرتاه هما النقطتان $F_1(0,\sqrt{8}) , F_2(0,-\sqrt{8})$.

الحل : $\because$ البؤرتان تنتمي لمحور الصادات

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

$\because 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

$c = \sqrt{8} \Rightarrow c^2 = 8$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 8 - 4 \Rightarrow a^2 = 4$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1}$

في هذا المثال يكون المحور الحقيقي مساوٍ للمحور المرافق ويسمى القطع الزائد القائم وأختلافه المركزي ثابت هو $\sqrt{2}$ لأن النقاط الاربعة تشكل رؤوس مربع .

مثال : جد معادلة القطع الزائد إختلافه المركزي (2) والمسافة بين بؤرتيه (12) وبؤرتاه على محور الصادات.

الحل : البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$2c = 12 \Rightarrow c = 6$$

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow a=\frac{c}{e} \Longrightarrow a=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow a^2=9$$

$$c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow b^2=36-9 \Rightarrow b^2=27$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتاه (0 , 10) والفرق بين طول محوره الحقيقي والتخيلي يساوي 4 .

الحل :

$$c=10 \Longrightarrow c^2=100$$

$$2a-2b=4 \Rightarrow a-b=2$$

$$a = 2+b \; \ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$100 = b^2+(2+b)^2$$

$$100 = b^2+4+4b+b^2$$

$$100 = 2b^2+4+4b$$

$$[2b^2+4b-96=0\,] \div 2$$

$$b^2+2b-48=0$$

$$(b+8)(b-6)=0$$

$b=-8$ تهمل

$$b=6 \Rightarrow b^2=36$$

$$a=2+6=8 \Longrightarrow a^2=64$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1}$

مثال : جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الاصل أحد بؤرتيه $(0\,,-6)$ وأحد رأسيه $(0\,,4)$.

الحل :

$$c=6 \Longrightarrow c^2=36$$

$a=4 \Rightarrow a^2=16$ $\quad \therefore c>a$ لأنه قطع زائد

$$c^2=a^2+b^2$$

$$36 = 16+b^2 \Rightarrow b^2=36-16 \Rightarrow b^2=20$$

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ $\boxed{\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1}$ معادلة القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 32x = 0$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{3}$ ؟

الحل :

$y^2 - 32x = 0$ القطع المكافئ

$y^2 = 32x$

$y^2 = 4px \Rightarrow p = 8$

القطع المخروطي لم يذكر نوعه ولكن من علاقة $c > a$ نحصل على أنه قطع زائد .

$F_1(8, 0)$ بؤرة القطع المكافئ هي

V_1, V_2 للقطع الزائد

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{3} \Longrightarrow 3c = 5b \Longrightarrow c = \frac{5b}{3} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\left(\frac{5b}{3}\right)^2 = 64 + b^2$$

$$\left[\frac{25b^2}{9} = 64 + b^2\right] \times 9$$

$$25b^2 = 576 + 9b^2 \Longrightarrow 25b^2 - 9b^2 = 576$$

$$16b^2 = 576 \Rightarrow b^2 = \frac{576}{16} = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$\boxed{\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1}$$ معادلة القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بالنقطتين $\left(-5, \frac{9}{4}\right), \left(4\sqrt{2}, 3\right)$ ؟

الحل : نعوض النقطة $\left(4\sqrt{2}, 3\right)$ في معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{(3)^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{32}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1\right) a^2b^2$$

$$32\,b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{(-5)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{25}{a^2} - \frac{\frac{81}{16}}{b^2} = 1\right) a^2b^2$$

$$25b^2 - \frac{81}{16}a^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\mp 25b^2 - \frac{81}{16}a^2 = \mp a^2b^2 \;\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$32\,b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\left[7b^2 - \frac{63}{16}a^2 = 0\right] \times 16$$
$$112b^2 - 63a^2 = 0$$
$$63a^2 = 112b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{112}{63}b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{9}b^2$$
$$32b^2 - 9.\frac{16}{9}b^2 = \frac{16}{9}b^2b^2$$
$$32b^2 - 16b^2 = \frac{16}{9}b^4 \Rightarrow 16b^2 = \frac{16}{9}b^4 \Rightarrow 16 = \frac{16}{9}b^2 \Rightarrow b^2 = 9$$
$$a^2 = \frac{16}{9}b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{9} \times 9 = 16$$

$\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطة $(3\,,0)$ والبعد بين بؤرتيه 10 وحدات ؟

الحل :

$$a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$$
$$2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$ معادلة القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع الزائد أحد بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -40x$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$ ؟

الحل :

$$y^2 = -40x \qquad , \qquad y^2 = -16x$$
$$40 = 4p \Rightarrow p = \frac{40}{4} = 10 \quad , \quad 16 = 4p \Rightarrow p = \frac{16}{4} = 4$$

معادلة الدليل $x = 4 \;,\; a = 4$

نقطة التماس $a^2 = 16$ للقطع الزائد $(4\,,0)$

$c = 10 \Rightarrow c^2 = 100 \qquad c = 10 \;,\; F_1(10\,,0) \;,\; F_2(-10\,,0)$ بؤرتي القطع الزائد

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$100 = 16 + b^2$$
$$b^2 = 100 - 16$$
$$b^2 = 84$$
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1$$

مثال : عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيق والمرافق للقطع الزائد $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

الحل :

$\because\ a^2=64 \Rightarrow a=8 \Rightarrow 2a=2\times 8=16$ وحدة طول المحور الحقيقي

$\because\ b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=2\times 6=12$ وحدة طول المحور المرافق

$c^2=a^2+b^2=64+36=100 \Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$

$V_1(8\,,0)\,,V_2\,(-8\,,0)$ رأسا القطع الزائد

$P_1(0\,,6)\,,P_2\,(0\,,-6)$ قطبا القطع الزائد

$F_1(10\,,0)\,,F_2\,(-10\,,0)$ بؤرتا القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $(0\,,-2\sqrt{5})$ وطول محوره الحقيقي (8) وحدات .

الحل : البؤرة صادية ومعادلة القطع $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$c=2\sqrt{5} \Rightarrow c^2=20$

$2a=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow a^2=16$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=20-16 \Rightarrow b^2=4$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

ملاحظة : اذا مر القطع الزائد بنقطة إحدى إحداثياتها (صفر) ، فالنقطة تمثل إحدى رؤوسه .

إنسحاب المحاور للقطع الزائد

درسنا في الامثلة السابقة القطع الزائد الذي يكون مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على أحدى المحاور الاحداثية ، والآن سوف ندرس القطع الزائد بعد إنسحابه الى جهة معينة وسوف نرمز الى مركز القطع بـ $(h\,,k)$ وهذا الجدول يلخص لنا جميع الحالات :

القطع الزائد	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة
) (	$F_1(c+h,k)$ $F_2(-c+h,k)$	$V_1(a+h,k)$ $V_2\,(-a+h,k)$	$(h\,,b+k)$ $(h\,,-b+k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
◡ ◠	$F_1(h,c+k)$ $F_2(h,-c+k)$	$V_1(h,a+k)$ $V_2\,(h,-a+k)$	$(b+h\,,k)$ $(-b+h\,,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

مثال : جد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي وطول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

الحل : بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الزائد $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

مركز القطع الزائد $h=-2 \quad , \quad k=1 \Longrightarrow (h\,,k)=(-2\,,1)$

طول المحور الحقيقي $a^2=9 \;\Longrightarrow a=3 \;\Longrightarrow 2a=6$ وحدة

طول المحور المرافق $b^2=4 \;\Longrightarrow b=2 \;\Longrightarrow 2b=4$ وحدة

$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow c^2=9+4=13 \Longrightarrow c=\sqrt{13}$

البؤرتان $F_1(c+h,k)=F_1(\sqrt{13}-2\,,1) \quad , \quad F_2(h-c,k)=F_2(-2-\sqrt{13},1)$

الرأسان $V_1(a+h,k)=V_1(1\,,1) \quad , \quad V_2(-a+h,k)=V_2(-5\,,1)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$

مثال : جد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

$$4x^2-9y^2-16x-54y=101$$

الحل :

$4(x^2-4x)-9(y^2+6y)=101$

$4(x^2-4x+4)-9(y^2+6y+9)=101+16-81 \qquad (\frac{1}{2}\,x\text{ معامل})^2=(\frac{1}{2}\,(4)\,)^2=4$

$4(x-2)^2-9(y+3)^2=36 \;\;]\div 36 \qquad (\frac{1}{2}\,y\text{ معامل})^2=(\frac{1}{2}\,(6)\,)^2=9$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1\\&\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left|\begin{aligned}&h=2 \;,\; k=-3 \;,\; a=3 \;,\; b=2\\&c^2=a^2+b^2=9+4=13 \;\Rightarrow\; c=\sqrt{13}\end{aligned}\right.$$

المركز : $(h\,,k)=(2\,,-3)$

البؤرتان : $F_1(c+h,k)=F_1(2+\sqrt{13},-3)$

$F_2(-c+h,k)=F_2(2-\sqrt{13}\,,-3)$

الرأسان :

$V_1(a+h,k)=V_1(5\,,-3)$

$V_2(-a+h,k)=V_1(-1\,,-3)$

الاختلاف المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

حل تمارين $(2-3)$

س1/ عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الاتية :

a) $12x^2 - 4y^2 = 48$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على (48)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة

طول المحور المرافق $b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2b = 2\left(2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$ وحدة

$\because c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

البؤرتان $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$ الرأسان $V_1(2,0)$, $V_2(-2,0)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$

b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على (144)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة

طول المحور المرافق $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ وحدة

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

الرأسان $V_1(3,0)$, $V_2(-3,0)$ البؤرتان $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$

c) $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$ وزاري ٢٠١١/ د٢

الحل : نقسم طرفي المعادلة على (8)

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad , \ h = 1 , k = -1 \Rightarrow (h,k) = (1,-1)$$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة

طول المحور المرافق $b^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2}$ وحدة

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow c^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$

البؤرتان $\overline{F_1}(h, c+k) = \overline{F_1}(1, \sqrt{6}-1)$

$\overline{F_2}(h, -c+k) = \overline{F_2}(1, -\sqrt{6}-1)$

الرأسان $\overline{V_1}(h, a+k) = \overline{V_1}(1,1)$

$\overline{V_2}(h, -a+k) = \overline{V_2}(1,-3)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$

d) $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

الحل : نرتب معادلة القطع الزائد بشكل مربع كامل كما يلي :

$$16\,(x^2 + 10x) - 9\,(y^2 - 2y) = 185$$

باضافة (391) الى طرفي المعادلة حتى تكون حدود (x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$$(\frac{1}{2}\ x\ \text{معامل})^2 = (\frac{1}{2}\ (10)\ )^2 = 25$$

$$(\frac{1}{2}\ y\ \text{معامل})^2 = (\frac{1}{2}\ (2)\ )^2 = 1$$

$$16\,(x^2 + 10x + 25) - 9\,(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9$$

$$16\,(x+5)^2 - 9\,(y-1)^2 = 576$$

$$\frac{16\,(x+5)^2}{576} - \frac{9\,(y-1)^2}{576} = \frac{576}{576}$$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1 \overset{\text{بالمقارنة}}{\Longrightarrow} \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\ ,\ h = -5\ , k = 1 \Rightarrow (h\,,k) = (-5\,,1)$$

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Longrightarrow 2a = 12$ وحدة   طول المحور الحقيقي

$b^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Longrightarrow 2b = 16$ وحدة   طول المحور المرافق

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow c^2 = 100 \Longrightarrow c = 10$$

البؤرتان $\overline{F_1}(c+h\,,k) = \overline{F_1}(5,1)$

$\overline{F_2}(-c+h\,,k) = \overline{F_2}(-15\,,1)$

الرأسان $\overline{V_1}(a+h\,,k) = \overline{V_1}(1\,,1)$

$\overline{V_2}(-a+h\,,k) = \overline{V_2}(-11\,,1)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} > 1$

س2/ أكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الاتية ثم ارسم القطع :

أ- البؤرتان هما النقطتان $(\pm 5\,,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل : البؤرتان سينيتان ومعادلة القطع :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$$

$$\because \overline{F_1}(-5\,,0)\ ,\ \overline{F_2}\,(5\,,0)$$

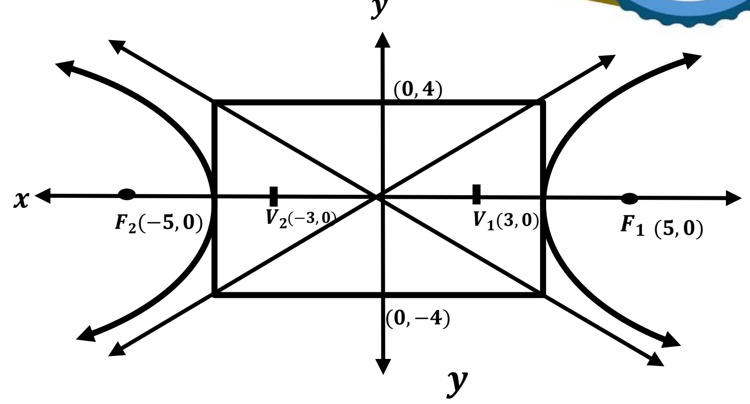
ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ والرأسان هما :

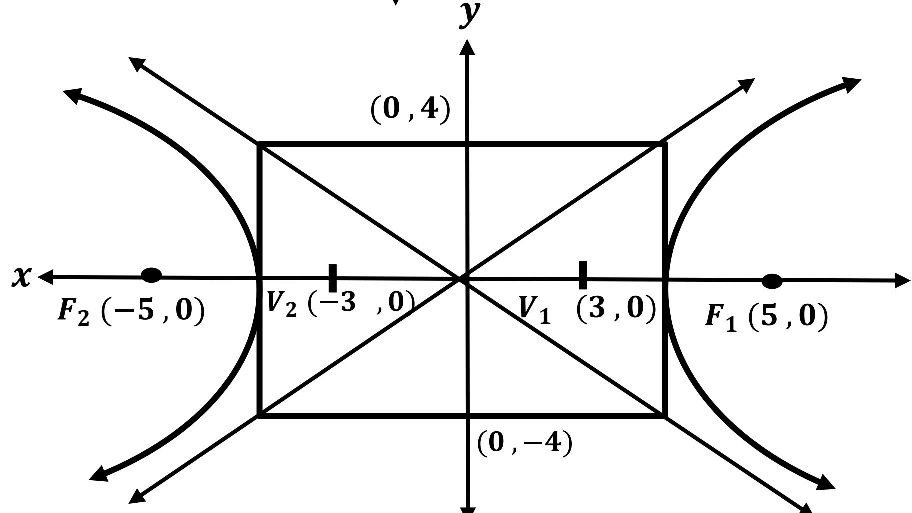
$$V_1(3\,,0)\ ,\ V_2(-3\,,0) \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$





ب- طول محوره الحقيقي (12) وحدة ، وطول محوره المرافق (10) وحدات ، وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل .

الحل :

$$\because 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$$

$$\because 2b = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b^2 = 25$$

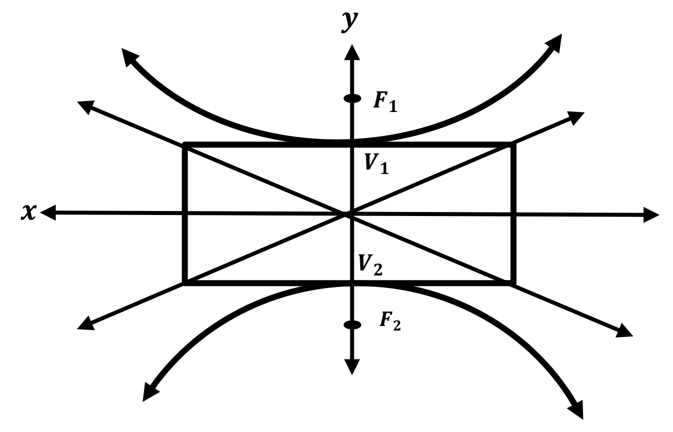
$$\because c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 36 \Longrightarrow c^2 = 61$$

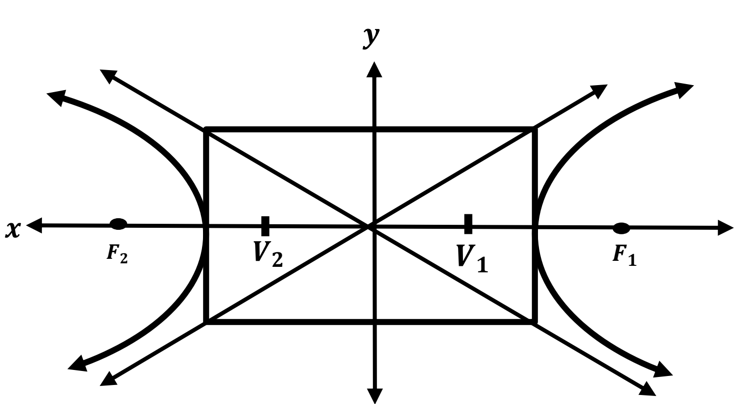
البؤرتان سينيتان

فإن معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

البؤرتان صاديتان

فإن معادلة القطع الزائد هي : $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$





ج) مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة وإختلافه المركزي (3) .

الحل : البؤرتان صاديتان ومعادلة القطع الزائد   وزاري ٢٠١٣ / د٢

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\because 2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 2$

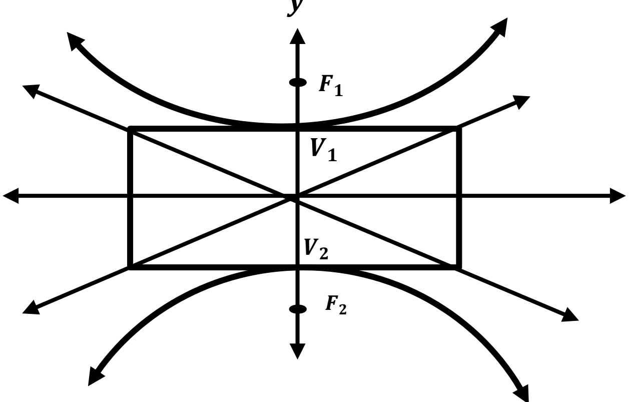
$\because e = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \Rightarrow c^2 = 9\,a^2$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9\,a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow 8a^2 = 2 \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{1}{4}}$, $\boxed{c^2 = \frac{9}{4}}$

$\overline{F_1}\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\overline{F_2}\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

$\overline{V_1}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{V_2}\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{4y^2}{1} - \frac{x^2}{2} = 1$ معادلة القطع الزائد



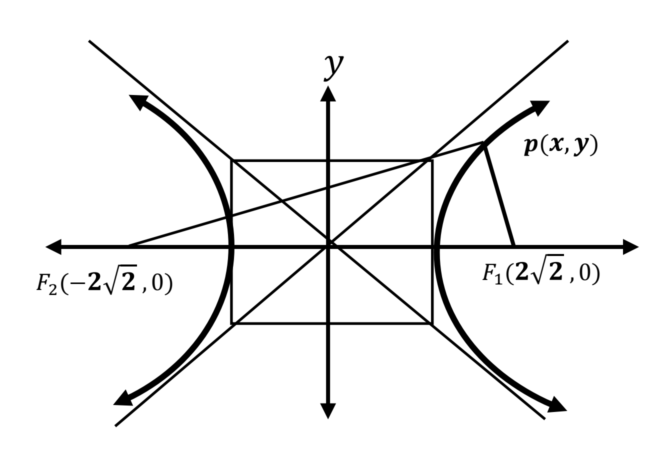
س3/ جد باستخدام التعريف القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة منه عن بؤرتيه يساوي (4) .

الحل :

$\because 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

القطع الزائد $P(x, y) \in$ النقطة

$\therefore |pF_1 - p\,F_2| = 2a$ (حسب التعريف)



$pF_1 - p\,F_2 = \pm 2a$

$$\sqrt{\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = \pm 4$$

$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2}=\pm 4+\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}$ (بتربيع الطرفين)

$x^2-4\sqrt{2}x+8+y^2=16\pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}+x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2$

$[\pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}=16+8\sqrt{2}x\quad]\div 8$

$\pm\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}=2+\sqrt{2}x$ (بتربيع الطرفين)

$x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2=4+4\sqrt{2}x+2x^2$

$[x^2-y^2=4\quad]\div 4\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1}$ معادلة القطع الزائد

س4/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5}),(1,-2\sqrt{5})$ ، جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل . وزاري ٢٠١٣ / د٣ وزاري ٢٠١٤ / د١

الحل : من القطع المكافئ

$\because$ النقطتان $(1,2\sqrt{5}),(1,-2\sqrt{5})$ متناظرة مع المحور السيني لذا فبؤرته سينية وفتحته نحو اليمين ومعادلة القطع المكافئ $y^2=4px$.

$\because$ النقطة $(1,-\sqrt{5})$ تحقق معادلة القطع المكافئ (لأنه يمر بها)

$(2\sqrt{5})^2=4p(1)\Rightarrow 20=4p\Rightarrow p=5\Rightarrow(5,0)$ البؤرة

$y^2=20x$ معادلة القطع المكافئ

بؤرة القطع المكافئ $(5,0)$ تمثل إحدى بؤرتي القطع الزائد

في القطع الزائد

$\because 2a=6\Rightarrow a=3\Rightarrow a^2=9$

$\because$ $(5,0),(-5,0)$ بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\therefore c=5\Rightarrow c^2=25$

$\therefore c^2=a^2+b^2\Rightarrow 25=9+b^2\Rightarrow b^2=16$

$\boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1}$ معادلة القطع الزائد

س5/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2-ky^2=90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2+16y^2=576$ جد قيمة كل من h,k التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية . وزاري ٢٠١٢ / د٢

الحل :

من القطع الناقص :

$[9x^2+16y^2=576\ ]\div 576\Rightarrow\frac{9x^2}{576}+\frac{16y^2}{576}=\frac{576}{576}\Rightarrow\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

$\boxed{a^2=64}$ $\boxed{b^2=36}$ $\Rightarrow a^2=c^2+b^2\Rightarrow c^2=64-36=28\Rightarrow c=2\sqrt{7}$

$\therefore(-2\sqrt{7},0),(2\sqrt{7},0)$ بؤرتا القطع الناقص

من القطع الزائد :

بؤرتا القطع الزائد $(-2\sqrt{7}, 0), (2\sqrt{7}, 0) \Leftarrow c = 2\sqrt{7} \Leftarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$c = 2\sqrt{7} \Rightarrow c^2 = 28$

$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1}$ معادلة القطع الزائد

$[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90 \Rightarrow \frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = \frac{90}{90} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$

$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow h = \frac{90}{a^2} = \frac{90}{18} \Rightarrow \boxed{h = 5}$, $b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = \frac{90}{b^2} = \frac{90}{10} \Rightarrow \boxed{k = 9}$

س6/ أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين $1, 9$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين . وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

$2c = 1 + 9 = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \boxed{c^2 = 25}$

$2a = 9 - 1 = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \boxed{a^2 = 16}$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow \boxed{b^2 = 9}$

هناك احتمالين لمعادلة القطع الزائد

معادلة القطع الزائد سينية $\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الزائد صادية $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

س7/جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل . وزاري ٢٠١٣ / د٣

الحل : من القطع الزائد

$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\therefore \boxed{a^2 = 12}$ $\boxed{b^2 = 4}$ $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$\therefore$ بؤرتا القطع الزائد $(-4, 0), (4, 0)$

من القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

بؤرتا القطع الناقص $(-4, 0), (4, 0) \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$$\because \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = \frac{5b}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{25b^2}{9}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow [\frac{25b^2}{9} = 16 + b^2] \times 9$$

$$25b^2 = 144 + 9b^2 \Rightarrow 16b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{25b^2}{9} = \frac{25(9)}{9} \Rightarrow a^2 = 25$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$

س8/ النقطة $P(6, L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلاً من

أ) قيمة L .

ب) طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P .

الحل :

أ) النقطة $P(6, L)$ تنتمي الى القطع الزائد وهي تحقق معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$

$$(6)^2 - 3y^2 = 12 \Longrightarrow 36 - 3L^2 = 12 \Longrightarrow 3L^2 = 24 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore P_1 (6, 2\sqrt{2}) \quad , \quad P_2 (6, -2\sqrt{2})$$

ب) من القطع الزائد :

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow \boxed{a^2 = 12} \quad \boxed{b^2 = 4}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow c = \pm 4 \Rightarrow F_1(4, 0) \quad , \quad F_2(-4, 0)$$

المقصود بنصف القطر البؤري (اليمين) هو البعد بين البؤرة اليمنى $F_1(4, 0)$ والنقطة P .

$$P_1F_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$ وحدة طول

$$P_2F_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-4)^2 + (-2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$ وحدة طول

س9/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$.

وزاري ٢٠١١ / د١ وزاري ٢٠١٤ / د٢ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

من القطع المكافئ

$$\left.\begin{matrix} x^2 = -12y \\ x^2 = -4py \end{matrix}\right\} \Rightarrow -4p = -12 \Rightarrow p = 3$$

معادلة الدليل $y = p \Longrightarrow \boxed{y = 3}$

من القطع الناقص

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \quad , \quad b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Longrightarrow c = 4$$

من القطع الزائد

∵ دليل القطع المكافئ يقطع المحور الصادي عند النقطة $(0\,,3)$ وهي رأس القطع الزائد

$$a = 3 \;\Rightarrow\; a^2 = 9$$

بؤرتا القطع الناقص (صاديتان) وتنطبقان على بؤرتي القطع الزائد فمعادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

بؤرتا القطع الزائد $(0\,,4), (0\,,-4) \Longrightarrow c = 4 \Longrightarrow c^2 = 16$

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow 16 = 9 + b^2 \;\Rightarrow b^2 = 7$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1}$

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان على محور الصادات وطول المحور الحقيقي له 16 والنسبة بين المسافة بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي $\frac{5}{4}$.

الحل :

$$\because 2a = 16 \;\Longrightarrow a = 8 \;\Longrightarrow\; a^2 = 64$$

$$\because \frac{2c}{2a} = \frac{5}{4} \;\;\Longrightarrow \frac{c}{8} = \frac{5}{4} \;\Longrightarrow\; c = 10 \;\Longrightarrow c^2 = 100$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 100 - 64 \;\Longrightarrow b^2 = 36$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 20y$ وطول محوره المرافق يساوي البعد بين بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

الحل : من القطع المكافئ :

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 20y$$

$$4p = 20 \;\Longrightarrow p = 5 \;\Longrightarrow\; (0\,,5)$$ البؤرة

من القطع الناقص :

$$a^2 = 16 \quad , \quad b^2 = 9 \;\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \;\Longrightarrow c^2 = 7 \;\Longrightarrow c = \sqrt{7} \;\;\Longrightarrow \boxed{2c = 2\sqrt{7}}$$

من القطع الزائد :

$\because 2b = 2\sqrt{7}$ طول المحور المرافق $\quad b = \sqrt{7} \;\Longrightarrow \boxed{b^2 = 7}$

بؤرتا القطع الزائد $(0, 5)\;, (0\,,-5) \Longleftarrow c = 5 \Longleftarrow$ القانون $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow\; a^2 = 25 - 7 \Longrightarrow \boxed{a^2 = 18}$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{7} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطتين $(3\,,-6)$, $(0\,,3\sqrt{2})$

الحل : ∵ القطع الزائد يمر بالنقطة $(0\,,3\sqrt{2})$ لذا فالنقطة تمثل رأس القطع الزائد وقيمة $a = 3\sqrt{2}$ فإن

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

∴ $(3\,,-6)$ تنتمي للقطع الزائد لذا فهي تحقق معادلته

$$\frac{(-6)^2}{(3\sqrt{2})^2} - \frac{(3)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{18} - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow 2 - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\boxed{\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{9} = 1}$$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة .

الحل : من القطع الناقص :

رأسا القطع الناقص $(10\,,0)\,,(-10\,,0) \Leftarrow a = \pm 10 \Leftarrow b^2 = 64 \quad , \quad a^2 = 100$

من القطع الزائد :

بؤرتا القطع الزائد $(10\,,0)\,,(-10\,,0) \Rightarrow c = 10 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\because 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 36 \Rightarrow b^2 = 64$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله $y^2 + 24x = 0$ ، اذا علمت ان مساحة القطع الناقص $80\pi\ cm^2$. وزاري ٢٠١٦ / د١

الحل : في القطع المكافئ :

$$y^2 = -4px$$

$$y^2 + 24x = 0 \Rightarrow \quad y^2 = -24x$$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله $-24x = -4px \xrightarrow{(\div -4)} p = 6 \Rightarrow 2p = 12$

في القطع الناقص :

$$2c = 12 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$$

$$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$A = ab\pi = 80\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) فينتج :

$$a^2 - \left(\frac{80}{a}\right)^2 = 36 \xrightarrow{(\times a^2)} a^4 - 6400 = 36a^2 \Rightarrow a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$$

$$(a^2 - 100)(a^2 + 64) = 0$$

أما $a^2 = 100 \implies b^2 = \frac{6400}{a^2} = \frac{6400}{100} = 64$

أو $a^2 = -64$ يهمل

∴ هناك معادلتان للقطع الناقص لأن موقع البؤرتين غير محدد وهما :

$$\boxed{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1} \quad or \quad \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1}$$

مثال : جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما يقعان على محور السينات وطول المحور الكبير $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول . وزاري ٢٠١٦ / د١

الحل : ∵ كل من القطعين يمر ببؤرة الآخر

∴ رأسا القطع الناقص يمثلان بؤرتا القطع الزائد وبؤرتا القطع الناقص تمثلان رأسا القطع الزائد

في القطع الناقص :

$2a = 6\sqrt{2} \implies a = 3\sqrt{2} \implies a^2 = 18 \implies c^2 = 9$

$\because\ a^2 = b^2 + c^2$

$\therefore\ b^2 = 18 - 9 \implies b^2 = 9$

$\therefore\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

في القطع الزائد :

$2a = 6 \implies a = 3 \implies a^2 = 9 \implies c^2 = 9$

$\because\ c^2 = a^2 + c^2 \implies b^2 = 18 - 9 \quad \therefore\ b^2 = 9$

$\therefore\ \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الزائد

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الثاني

س4/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل احدهما يمر ببؤرة الاخر فإذا كانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة القطع الناقص فجد : وزاري ٢٠١٤ / د٣

أ) مساحة القطع الناقص ب) محيط القطع الناقص ج) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه

د) الاختلاف المركزي لكل منهما

الحل :

أ) مساحة القطع الناقص

$9x^2 + 25y^2 = 225 \xRightarrow{\div 225} \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 25 \implies a = 5 \quad , \quad b^2 = 9 \implies b = 3$

$\therefore\ A = ab\pi = (5)(3)\pi = 15\,\pi$ وحدة مربعة

ب) محيط القطع الناقص

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{34}{2}} = 2\pi\sqrt{17}$$ وحدة

ج) من القطع الناقص :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$\therefore (5,0), (-5,0)$ الرأسان $(4,0), (-4,0)$ البؤرتان

من القطع الزائد :

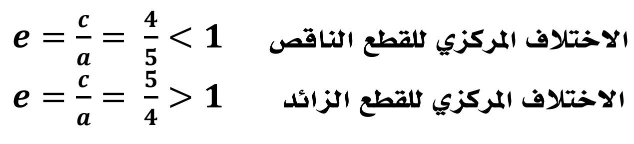
$\because$ القطع الزائد يمر ببؤرة القطع الناقص

$(5,0), (-5,0)$ البؤرتان $(4,0), (-4,0)$ الرأسان

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$$

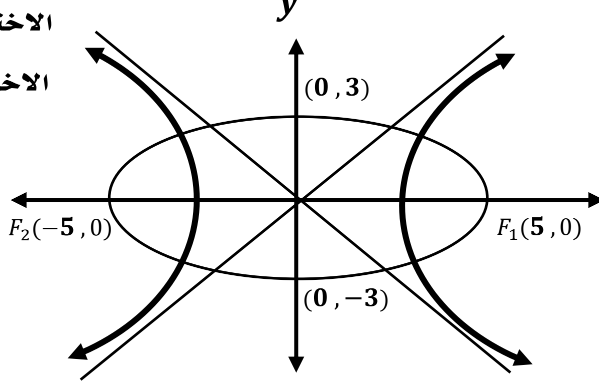
معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$

د) الاختلاف المركزي :



$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$ الاختلاف المركزي للقطع الناقص

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$ الاختلاف المركزي للقطع الزائد



س5/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي $10\,\pi$ وحدة . وزاري ٢٠١٥ / د٣ وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل :

مساحة منطقة القطع الناقص $= 7\pi$

$$A = ab\pi = 7\pi \Rightarrow ab = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{a} \dots\dots\dots (1)$$

محيط القطع الناقص $= 10\pi$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \xrightarrow{(\div 2\pi)} 5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ بالتربيع

$$\frac{a^2+b^2}{2} = 25 \Rightarrow a^2 + b^2 = 50 \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض معادلة (1) في معادلة (2) :

$$\left[a^2 + \frac{49}{a^2} = 50\right] \times a^2$$

$a^4 - 50a^2 + 49 = 0$

$(a^2 - 49)(a^2 - 1) = 0$

$either\ \ a^2 = 49 \ \Rightarrow a = 7 \ \Rightarrow b = \frac{7}{a} = \frac{7}{7} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

$or \qquad a^2 = 1 \quad \Rightarrow a = 1 \ \Rightarrow \ b = \frac{7}{a} = \frac{7}{1} \Rightarrow b = 7$ يهمل

- لأن قيمة (a) يجب ان تكون أكبر من قيمة (b) في القطع الناقص . معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1}$

الفصل الثالث

تطبيقات التفاضل



تطبيقات التفاضل

القواعد الاساسية للمشتقة (مراجعة)

القاعدة الأولى : مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر

1) $f(x) = 3 \Rightarrow \acute{f}(x) = 0$

2) $f(x) = \frac{2}{5} \Rightarrow \acute{f}(x) = 0$

القاعدة الثانية : اذا كان $f(x) = x^n$ فإن $\acute{f}(x) = nx^{n-1}$

1) $f(x) = x^3 \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2$

2) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

القاعدة الثالثة : اذا كان $f(x) = ax^n$ فإن $\acute{f}(x) = anx^{n-1}$ حيث $x \in R$

1) $f(x) = 6x^4 \Rightarrow \acute{f}(x) = 24x^3$

2) $f(x) = 7\sqrt{x} = 7x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = 7(\frac{1}{2})x^{\frac{-1}{2}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = -5x^{-3} \Rightarrow \acute{f}(x) = 15x^{-4} = \frac{15}{x^4}$

القاعدة الرابعة : مشتقة مجموع دوال يساوي مجموع مشتقاتها

1) $f(x) = x^3 + 7x \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2 + 7$

2) $f(x) = 6x^4 + \frac{1}{x} \Rightarrow \acute{f}(x) = 24x^3 - \frac{1}{x^2}$

القاعدة الخامسة : (مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى)

$f(x) = (4x^3 + 7x)(2x) \Rightarrow \acute{f}(x) = (4x^3 + 7x)(2) + (2x)(12x^2 + 7) = 8x^3 + 14x + 24x^3 + 14x$

القاعدة السادسة : مشتقة قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 1} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^4 + 1)(6x^2) - (2x^3 + 1)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{6x^6 + 6x^2 - 8x^6 - 4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$

القاعدة السابعة : مشتقة مجموعة دوال مرفوعة لأس معين اذا كان $f(x) = [g(x)]^n$ فإن

$\acute{f}(x) = n[g(x)]^{n-1}.\acute{g}(x)$

1) $f(x) = (4x^3 + 7x)^5 \Rightarrow \acute{f}(x) = 5(4x^3 + 7x)^4 \,.\, 12x^2 + 7$

2) $f(x) = x^2\sqrt{4x^3 + 2x} \Rightarrow f(x) = x^2(4x^3 + 2x)^{\frac{1}{2}}$

$$\acute{f}(x) = x^2[\frac{1}{2}(4x^3+2x)^{-\frac{1}{2}}(12x^2+2)] + (4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}.(2x)$$

$$= \frac{x^2(12x^2+2)}{2(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}} + 2x\,(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

القواعد الاساسية لأشتقاق الدوال الدائرية :

1) $f(x) = \sin y \;\Rightarrow \acute{f}(x) = \cos(y).\frac{dy}{dx}$

2) $f(x) = \cos y \;\Rightarrow \acute{f}(x) = -\sin(y).\frac{dy}{dx}$

3) $f(x) = \tan y \;\Rightarrow \acute{f}(x) = \sec^2(y).\frac{dy}{dx}$

4) $f(x) = \cot y \;\Rightarrow \acute{f}(x) = -\csc^2(y).\frac{dy}{dx}$

5) $f(x) = \sec y \;\Rightarrow \acute{f}(x) = \sec y \tan y.\frac{dy}{dx}$

6) $f(x) = \csc y \;\Rightarrow \acute{f}(x) = -\csc y \cot y.\frac{dy}{dx}$

بعض العلاقات والقوانين المهمة :

1) $\sin^2 + \cos^2 = 1$	2) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	3) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
4) $\csc = \frac{1}{\sin x}$	5) $\sec = \frac{1}{\cos x}$	6) $\cot = \frac{1}{\tan x}$
7) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	8) $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$	
8) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$		
9) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$		

مثال : جد مشتقة ما يأتي :

1) $f(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

$$\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{(\text{دليل الجذر})\sqrt{(\text{الدالة})^{\text{الدليل}-1}}}$$

2) $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2 \Rightarrow \acute{f}(x) = 2\sin x.(\cos x)$

3) $f(x) = \sin x \cos x \Rightarrow \acute{f}(x) = \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x)$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

4) $f(x) = \tan x - x \Rightarrow \acute{f}(x) = \sec^2 x - 1 = (\tan^2 x + 1) - 1 = \tan^2 x$

المشتقات ذات الرتب العليا

اذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها الاولى هي $\acute{y} = \frac{dy}{dx} = \acute{f}(x)$ وهي دالة جديدة والدالة الجديدة $\acute{f}(x)$ اذا توافرت فيها شروط الاشتقاق فإن مشتقتها دالة تمثل المشتقة الثانية ويرمز لها $\acute{\acute{y}} = \frac{d^2y}{dx^2} = \acute{\acute{f}}(x)$ وهذه الاخيرة أيضا دالة جديدة واذا توافرت فيها شروط الاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة ويرمز لها $\acute{\acute{\acute{y}}} = \frac{d^3y}{dx^3} = \acute{\acute{\acute{f}}}(x)$ وهكذا يمكن ايجاد مشتقات متتالية وبدءا من المشتقة الثانية ويطلق على هذه المشتقات بالمشتقات العليا . وتكتب المشتقة من الرتبة n كما يلي : $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ حيث n عدد صحيح موجب

ملاحظات عامة :

اذا كانت $[s = f(x)]$ حيث (s) تمثل ازاحة الجسم عند اي زمن (t) لذا فإن :

١- $\frac{ds}{dt} = \acute{f}(t)$ المشتقة الأولى وهي تمثل السرعة اللحظية للجسم ويرمز لها بالرمز (v) .

٢- $\frac{d^2s}{dt^2} = \acute{\acute{f}}(t)$ المشتقة الثانية وهي تمثل التعجيل للجسم (معدل تغيير السرعة) ويرمز لها بالرمز (g) .

٣- $\frac{d^3s}{dt^3} = \acute{\acute{\acute{f}}}(t)$ المشتقة الثالثة وهي تمثل معدل التغير الزمني للتعجيل .

المشتقة الضمنية

اذا كانت $y = f(x)$ دالة بدلالة x فعند اشتقاق معادلة بدلالة x و y بالنسبة الى x نضيف $\acute{y}$ أو $\frac{dy}{dx}$ بعد كل مشتقة لـ y وتستخدم المشتقة الضمنية عندما يكون قيمة اس y أكبر من واحد كما ياتي :

مثال : اذا كانت $y = cos2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2\,cos2x\,.(2) = -4\,cos2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8\sin 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 16\,cos2x$$

مثال : اذا كان $y^2 + x^2 = 1$ فأثبت أن $y\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0$

الحل : نشتق العلاقة المعطاة اشتقاقا ضمنيا بالنسبة الى x

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \ \ ] \div 2$$

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0 \Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\,.\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

مثال : لتكن $xy - 13 = 0$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$ فجد المشتقة الثانية .

الحل :

$$x\frac{dy}{dx}+y-0=0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}.(1)+\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow y''=\frac{-2y'}{x}$$

مثال : اذا كانت $y=cos^2x-sin^2x$ اثبت ان $y''=-4\,cos^2x$

الحل : $y=cos^2x-sin^2x \Rightarrow y=cos2x$

$$y'=-sin2x.(2)=-2\,sin2x \Rightarrow y''=-2\,cos\,2x.(2)=-4\,cos\,2x$$

مثال : جد y'''' للدالة $f(x)=x^5+2\,x^3+3x+1$

الحل :

$$\acute{y}=5x^4+6x^2+3$$

$$\acute{\acute{y}}=20x^3+12x$$

$$y'''=60x^2+12$$

$$y''''=120x$$

مثال : اذا كانت $y=sin^4x$ اثبت ان $\frac{d^2y}{dx^2}+16y=12sin^2x$

الحل :

$$y=sin^4x \Rightarrow y=[sin\,x]^4$$

$$\frac{dy}{dx}=4[sin\,x]^3.[cos\,x]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4[sin\,x]^3.(-sinx)+(cosx).(12sin^2x.cos\,x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4sin^4x+12\,sin^2x\,cos^2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4sin^4x+12\,sin^2x\,(1-sin^2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4sin^4x+12\,sin^2x-12sin^4x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-16\,sin^4x+12\,sin^2x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}+16sin^4x=12\,sin^2x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+16y=12sin^2x$$

مثال : جد y' للدوال الاتية :

1) $f(x)=sin\,(2\,x^2+x+3) \Rightarrow y'=(4x+1)\,cos\,(2\,x^2+x+3)$

2) $f(x) = cot\sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}} csc^2 \sqrt[3]{x}$

3) $f(x) = sec\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} sec\frac{1}{x} tan\frac{1}{x}$

4) $f(x) = cosx\, tanx \Rightarrow y' = cosx .\ sec^2x + tan\,x .(-sinx) = cosx .\ sec^2x - tan\,x .sinx$

مثال : جد y' للدوال الاتية :

1) $f(x) = sin^3(\pi x^2 + 3x + 2)$ ❖ اذا كانت الدالة مرفوعة لقوة نضع القوة خارج القوس

$f(x) = [sin(\pi x^2 + 3x + 2)]^3$ الكبير ثم نشتق الدالة حسب الدالة القوسية

$f'(x) = 3[sin(\pi x^2 + 3x + 2)]^2 cos(\pi x^2 + 3x + 2)(2\pi x + 3)$

2) $f(x) = cos^{-4}x^2 \Rightarrow f(x) = [cos\, x^2]^{-4} \Rightarrow y' = -4[cos\, x^2]^{-5}.(-\underbrace{2x}\ sin\, x^2)$

مشتقة الزاوية

3) $f(x) = sec^{\frac{2}{3}} x^2 \Rightarrow f(x) = [secx^2]^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}[sec\, x^2]^{\frac{-1}{3}} . (sec\, x^2 tan\, x^2)(\underbrace{2x})$

مشتقة الزاوية

مثال : جد y' للدوال الاتية :

1) $sin(x\,y) = x^2 + 3y \Rightarrow cos\,x\,y\,[xy' + y(1)] = 2x + 3y'$

$xy'\ cos\,x\,y + y\,cos\,xy = 2x + 3y'$

$xy'\,cos\,xy - 3y' = 2x - y\,cos\,xy$

$y'(xcos\,xy - 3) = 2x - y\,cos\,xy \Rightarrow y' = \frac{2x - ycos\,xy}{xcos\,xy - 3}$

2) $\sqrt{tanx} = 2y^2 + x$

$\frac{sec^2x}{2\sqrt{tanx}} = 4yy' + 1 \Longrightarrow \frac{sec^2x}{2\sqrt{tanx}} - 1 = 4yy' \Rightarrow y' = \frac{\frac{sec^2x}{2\sqrt{tanx}} - 1}{4y}$

حل تمارين (3 – 1)

س1 : جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

a) $y = \sqrt{2-x}$, $\forall\, x < 2$

$y = (2-x)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}.(-1) = -\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}}.(-1) = \frac{-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}$

b) $y = \frac{2-x}{2+x} \quad , \quad x \neq -2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+x).(-1)-(2-x).(1)}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2} = -4\,(2+x)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8\,(2+x)^{-3}.(1) = \frac{8}{(2+x)^3}$$

c) $2xy - 4y + 5 = 0 \;,\; y \neq 0 \;,\; x \neq 2$

$$y\,(2x-4) = -5 \Rightarrow y = \frac{-5}{(2x-4)} = -5\,(2x-4)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5\,(2x-4)^{-2}.2 = 10\,(2x-4)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -20\,(2x-4)^{-3}.2 = \frac{-40}{(2x-4)^3}$$

س2 : جد $\dddot{f}(x)$ لكل مما يأتي :

a) $f(x) = 4\sqrt{6-2x} \qquad \forall\, x < 3$

$$f(x) = 4\,(6-2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(6-2x)^{-\frac{1}{2}}.(-2) = -4(6-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{f}(x) = -4(-\tfrac{1}{2})\,(6-2x)^{-\frac{3}{2}}.(-2) = -4(6-2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\dddot{f}(x) = 6\,(6-2x)^{-\frac{3}{2}-1}.(-2) = -12(6-2x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{-12}{(6-2x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\dddot{f}(1) = \frac{-12}{(6-2(1))^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(4)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(2^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

b) $f(x) = \sin \pi x$

$$\acute{f}(x) = \cos \pi x\,.(\pi) = \pi \cos \pi x \;,\; \ddot{f}(x) = -\pi \sin \pi x\,.(\pi) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$\dddot{f}(x) = -\pi^2 \cos \pi x\;(\pi) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$\dddot{f}(1) = -\pi^3 \cos \pi\;(1) = -\pi^3(-1) = \pi^3$$

c) $f(x) = \frac{3}{2-x} \;, x \neq 2$

$$f(x) = 3\,(2-x)^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = -3(2-x)^{-2}.(-1) = 3\,(2-x)^{-2}$$

$$\ddot{f}(x) = -6(2-x)^{-3}.(-1) = 6\,(2-x)^{-3}$$

$$\dddot{f}(x) = -18\,(2-x)^{-4}(-1) = 18\,(2-x)^{-4} = \frac{18}{(2-x)^4}$$

$\therefore \acute{\acute{f}}(1) = \frac{18}{(2-1)^4} = 18$

س3 : اذا كانت $y = \tan x$ فبرهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\,(1 + y^2)$ حيث $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}\ , n \in z$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = [secx]^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2\,[secx].secx\,tanx = 2\,tanx\,sec^2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,tanx\,(1 + tan^2x) = 2y\,(1 + y^2)$$

س4/ اذا كانت $y = x\,sinx$ فبرهن ان : $y^{(4)} - y + 4\,cosx = 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = x\,.cosx + sinx\,(1) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\,cosx + sinx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x\,.(-sinx) + cosx\,.(1) + cosx = -x\,sinx + 2\,cosx$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -x\,cosx + sinx\,(-1) - 2\,sinx = -x\,cosx - sinx - 2sinx$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -x(-sinx) + cosx\,.(-1) - cosx - 2\,cosx$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = x\,sinx - cosx - cosx - 2\,cosx = x\,sinx - 4\,cosx$$

$$L.S.H = y^{(4)} - y + 4\,cosx \Longrightarrow x\,sinx - 4\,cosx - x\,sinx + 4\,cosx = 0 = R.S.H$$

المعادلات المرتبطة بالزمن (المعادلات الزمنية)

اذا وجد اكثر من متغير بحيث تتوقف كل من هذه المتغيرات على متغير واحد ومثاله الزمن فتتغير كل المتغيرات تبعا لتغيره حيث هنا يكون الاشتقاق دائما بالنسبة للزمن $y = g(t)\ ,\ x = f(t)$ ، فمنها المتغيرات $x\,,y$ متغيرين تابعين كل منهما مرتبط بالمتغير المستقل (t) .

ولحل اي سؤال يتعلق بالمعادلات المرتبطة بالزمن نتبع مما يأتي :

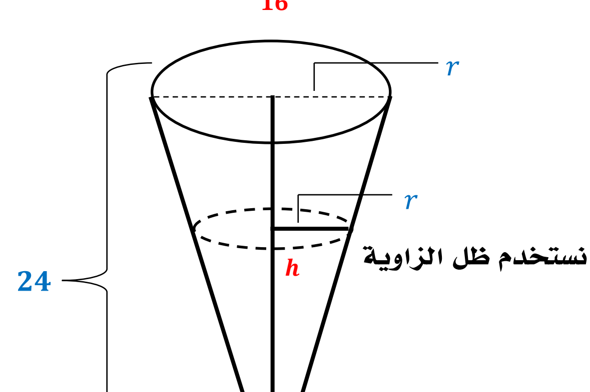
١- نرسم مخطط (اذا احتجنا اليه) ونحدد المتغيرات والثوابت ونضع لها رموز ونحدد العلاقة الرئيسية في حل السؤال وحسب السؤال (حجم ، مساحة ، مسافة ، ...) .

٢- اذا كان في السؤال اكثر من متغير نحاول ايجاد علاقة اخرى بين المتغيرات .

٣- نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t .

٤- نعوض معطيات السؤال من المتغيرات في المشتقة .

مثال : مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للاسفل ارتفاعه يساوي $24\ cm$ وطول قطر قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يترسب من السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $12\ cm$.



الحل :

نفرض نصف القطر القاعدة $= r$

نفرض حجم السائل $= v$

نفرض ارتفاع السائل $= h$

نستخدم ظل الزاوية $\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}h \ldots\ldots\ldots (1)$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة (١) في معادلة (٢)

$$v = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{3}h)^2 h \Rightarrow v = \frac{1}{27}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{27}\pi(3)h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \ldots\ldots\ldots (3)$$

معدل تغير حجم السائل في المخروط = معدل الصب − معدل التسرب

$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4\ \text{cm}^3/\text{s}$$

نعوض معدل تغير الحجم في معادلة (3)

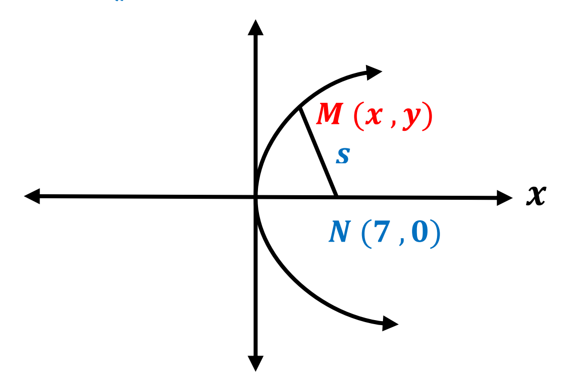
$$4 = \frac{1}{9}\pi(12)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{(4)(9)}{144\pi} = \frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

مثال : لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7, 0)$ يساوي 0.2 unit/s جد معدل التغير الزمني للاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 4$. وزاري ٢٠١٧/د١

الحل : لتكن النقطة $M(x, y) \in$ للقطع المكافئ

لتكن النقطة $N(7, 0)$

S المسافة بين N , M



$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

نعوض عن $y^2 = 4x$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} = \sqrt{x^2 - 10x + 49} = (x^2 - 10x + 49)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 49)^{-\frac{1}{2}}(2x - 10) \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

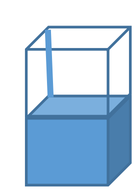
$0.2 = \frac{2(4)-10}{2\sqrt{(4)^2-10(4)+49}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{-2}{2\sqrt{25}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{-2}{10}\frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = -0.2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\ unit/s$

مثال : خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طولها $2\,m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.4 m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t . وزاري ٢٠١١/د١ ٢٠١٣/د٢

الحل : نفرض حجم الماء في الخزان في اي زمن $v = t$

نفرض ارتفاع الماء في الخزان في اي زمن $h = t$

نفرض مساحة القاعدة $= A$



$\frac{dh}{dt}$ معدل انخفاض الماء في الخزان وهو المطلوب

- ان الماء يأخذ شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة .

$\therefore \frac{dv}{dt} = -0.4$ تسرب (الاشارة السالبة تعني نقصان)

$$v = Ah \Rightarrow v = (2)(2)h \Rightarrow v = 4h \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$$

$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4} = -0.1\ m/h$$

معدل تغير انخفاض الماء في الخزان $= 0.1\frac{m}{h}$

مثال : صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$. وزاري ٢٠١٤ / د٣ ٢٠١١ / د٢

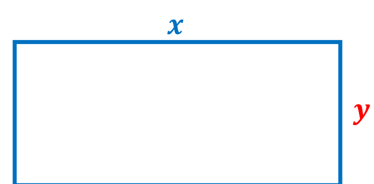
الحل :

نفرض طول المستطيل في اي زمن $x = t$

نفرض عرض المستطيل في اي زمن $y = t$

معدل التغير بالطول $\frac{dx}{dt} = 2cm/s$

معدل تغير العرض $\frac{dy}{dt} = ?$



العلاقة $A = xy \Rightarrow 96 = x\,y \;\ldots\ldots(1) \Rightarrow 96 = x\,(8) \Rightarrow x = \frac{96}{8} = 12$

نشتق طرفي معادلة (١) بالنسبة الى t

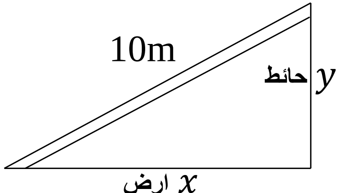
$$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$12\frac{dy}{dt} + 8(2) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = -\frac{4}{3}\ cm/s$$

معدل التناقص في عرض المستطيل $= \frac{4}{3}cm/s$

مثال : سلم طوله $10\ m$ يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه العلوي على حائط راسي فإذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ عندما يكون الطرف الاسفل على بعد $8\ m$ عن الحائط جد :

١) معدل انزلاق الطرف العلوي ٢) سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض . وزاري ٢٠١٤/د٢ ٢٠١٢/د١



الحل : نفرض عند اية لحظة

بُعد الطرف الاسفل عن الحائط هو $= x$

بُعد الطرف الاعلى عن الارض هو $= y$

قياس الزاوية بين السلم والارض $= \theta$

معدل تغير بعد الطرف الاسفل عن الحائط $\frac{dx}{dt} = 2$

$$1)\ x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 64 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 36 \quad , \ x = 8 \Rightarrow y = 6$$

$x^2 + y^2 = 100$ نشتق الطرفين

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2(8)(2) + 2(6)\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 32 + 12\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -32$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3} m/s$$

معدل انزلاق الطرف العلوي $= \frac{8}{3} m/s$

$$2)\ \sin\theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

نعوض $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{10}$

$$\frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

ومن تعويض القيم $x = 8$, $\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$

$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{-1}{3}\ rad/s$$ سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض

مثال : نقطة تتحرك على الدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ فاذا كان معدل تغير الاحداثي السيني لها $3cm/sec$ عند النقطة $p(1,2)$ جد معدل التغير في الاحداثي الصادي عند نفس النقطة .

الحل :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt} + 0 = 0$$

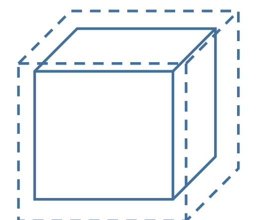
$$p(1,2) \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 3 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

$$2(1)(3) + 2(2)\frac{dy}{dt} + 4(3) - 6\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 6 + 4\frac{dy}{dt} + 12 - 6\frac{dy}{dt} = 0$$

$$18 - 2\frac{dy}{dt} = 0$$

$$18 = 2\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 9cm/sec$$

مثال : مكعب صلد طول حرفه $8\ cm$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعب ، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $= 1cm$



الحل :

نفرض سمك الجليد في اي زمن $x = t$

نفرض حجم الجليد في اي زمن $v = t$

المطلوب حساب $\frac{dx}{dt}$ عندما $\boxed{x = 1}$ ، $\boxed{\frac{dv}{dt} = -6cm^3/s}$

حجم الجليد = حجم المكعب المغطى بالجليد − حجم المكعب الاصلي

$v = (8 + 2x)^3 - (8)^3$ نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2.(2)\frac{dx}{dt} - 0 \Rightarrow -6 = 6\big(8 + 2(1)\big)^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow -1 = (10)^2\frac{dx}{dt}$$

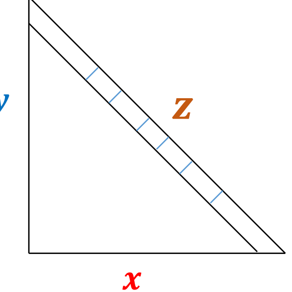
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{100}\ cm/s$$

معدل النقصان في سمك الجليد $= 0.01cm/s$

حل تمارين (2 – 3)

س1 : سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2m/s$ فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

الحل :



$z^2 = x^2 + y^2$ نشتق بالنسبة للزمن t

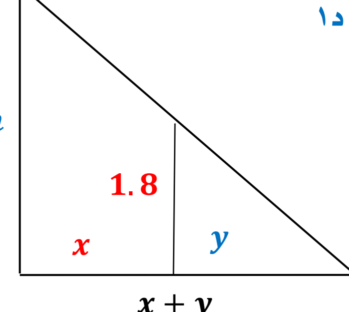
$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \dots\dots\dots(1)$$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}\,x$ نعوض في معادلة (١)

$$2x(2) + 2\sqrt{3}\,x\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$4x + 2\sqrt{3}\,x\,\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3}\,x\,\frac{dy}{dt} = -4x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-4x}{2\sqrt{3}\,x} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\ m/s$$

س2 : عمود طوله $7.2\ m$ في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله $1.8\ m$ مبتعدا عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد معدل تغيير طول ظل الرجل . وزاري ٢٠١٣ / د١



الحل :

نفرض بعد الرجل عن العمود $= x$

نفرض طول ظل الرجـــــل $= y$

من استعمال (tan) او من تشابه المثلثين نحصل على

$tan\ \theta = \frac{7.2}{x+y}$ في المثلث الكبير

$tan\ \theta = \frac{1.8}{y}$ في المثلث الصغير

$$\frac{7.2}{x+y} = \frac{1.8}{y} \Longrightarrow \frac{4}{x+y} = \frac{1}{y}$$

$$4y = x + y \Longrightarrow 3y = x$$ نشتق بدلالة t

$$3\ \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow 3\ \frac{dy}{dt} = 30 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 10\ \ m/min$$ معدل تغيير طول ظل الرجل

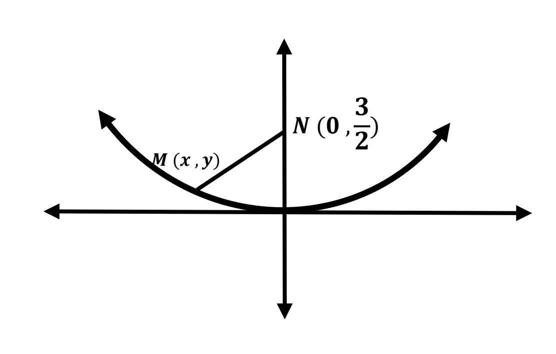
س3 : لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافيء $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0\ ,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M . وزاري ٢٠١٢/د٢

الحل :

لتكن النقطة $M(x\ ,y) \ni$ للقطع المكافيء المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M $\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}}$

لتكن النقطة $N(0\ ,\frac{3}{2})$

S المسافة بين M , N



$$\overline{MN} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{3}{2})^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$ نضع $\boxed{y = x^2}$

$$S = \sqrt{y + (y^2 - 3y + \frac{9}{4})} \Longrightarrow S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2y\frac{dy}{dt}-2\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\Rightarrow\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}=\frac{2\;\frac{dy}{dt}(y-1)}{2\;(y^2-2y+\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}=3(y-1)$ بتربيع الطرفين

$4(y^2-2y+\frac{9}{4})=9(y^2-2y+1)$

$4y^2-8y+9=9y^2-18y+9\Rightarrow 4y^2-9y^2-8y+18y+9-9=0$

$[-5y^2+10y=0]\ \div(-5)\Rightarrow y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

أما $y=0\Rightarrow x=0$ $\qquad$ $(0,0)$ تهمل

أو $y=2\Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$ $\qquad$ $\therefore\ M(\mp\sqrt{2},2)$

س4: جد النقطة التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t . وزاري ٢٠١٢/ د٣

الحل :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$$

$x^2+y^2+4x-8y=108\ \ldots\ldots.(1)$ العلاقة المعطاة

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0$ $\qquad$ نعوض بدل كل $\frac{dx}{dt}$ بـ $\frac{dy}{dt}$

$$2x\frac{dy}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dy}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}(2x+2y+4-8)=0$$

$\therefore\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow 2x+2y+4-8=0\Rightarrow[2x+2y-4=0]\div 2$

$x+y-2=0\Rightarrow y=2-x\ \ldots..(2)$ $\qquad$ نعوضها في معادلة الدائرة (1)

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$[2x^2+8x-120=0]\div 2\Rightarrow x^2+4x-60=0\Rightarrow(x+10)(x-6)=0$

اما $x=-10$ $\quad$ نعوضها في (2)

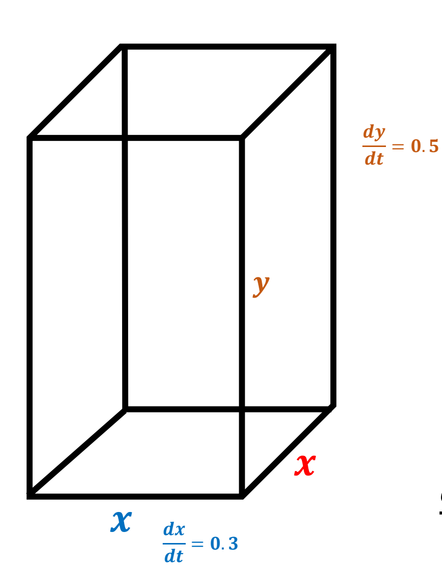
$y=2+10=12\Rightarrow(-10,12)$

نعوضها في (2) $x = 6$ أو

$y = 2 - 6 = -4 \Rightarrow (6, -4)$

∴ النقطتان هما $(-10, 12), (6, -4)$

س5 : متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.3\ cm/s)$ وارتفاعه يتناقص بمعدل $(0.5\ cm/s)$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول القاعدة $4\ cm$ والارتفاع $3\ cm$.



الحل / نفرض طول القاعدة في اي زمن $x = t$ $\quad \frac{dx}{dt} = 0.3$

نفرض ارتفاعه في اي زمن $y = t$ $\quad \frac{dy}{dt} = 0.5$

نفرض الحجم في اي زمن $v = t$

∴ الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$$\therefore v = x^2 . y$$

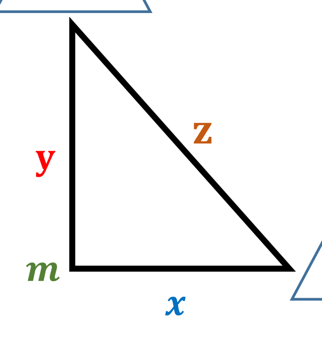
$$\frac{dv}{dt} = x^2 . \frac{dy}{dt} + y . 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2 . (-0.5) + (3)(2)(4)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = 16 . (-0.5) + 7.2 = -8 + 7.2 = -0.8\ cm^3/s$$

حلول الاسئلة الوزارية حول المعادلات المرتبطة

سؤال وزاري ٢٠٠٩/ د١ : طريقان متعامدان يلتقيان في m . تحركت سيارتان من نقطة m كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الاولى $80\ km/h$ ومعدل سرعة السيارة الثانية $60\ km/h$. جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة من m .



الحل / $\frac{dx}{dt} = 80\ km\backslash h$ $\quad \frac{dy}{dt} = 60\ km\backslash h$ $\quad \frac{dz}{dt} = ?$

المسافة التي قطعتها السيارة الاولى بعد ربع ساعة $= 80 \times \frac{1}{4} = 20\ km$

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية بعد ربع ساعة $= 60 \times \frac{1}{4} = 15\ km$



السرعة × الزمن = المسافة

فيثاغورس $z^2 = x^2 + y^2$ $\quad x = 20 \quad , y = 15$

$$z^2 = (20)^2 + (15)^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow z^2 = 625 \Rightarrow z = 25$$



$$2z\,.\frac{dz}{dt} = 2x\,.\frac{dx}{dt} + 2y\,.\frac{dy}{dt}\,]\ \div 2$$

$$z\,.\frac{dz}{dt} = x\,.\frac{dx}{dt} + y\,.\frac{dy}{dt}$$

$$25\,\frac{dz}{dt} = 20\,(80) + 15\,(60)$$

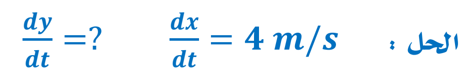
$$25\,\frac{dz}{dt} = 1600 + 900 \Longrightarrow 25\,\frac{dz}{dt} = 2500 \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25} = 100\ km\backslash h$$

سؤال وزاري ٢٠٠٩/ د٢ : سلم طوله (13 m) يرتكز على حائط شاقولي ، فإذا كان تحرك الطرف الاسفل للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل 4 m/s . جد معدل أنزلاق الطرف الاعلى للسلم عن الارض في اللحظة التي يكون فيها الطرف الاسفل على بعد $5m$ من الحائط .

y

13 m

x



الحل : $\frac{dx}{dt} = 4\ m/s \qquad \frac{dy}{dt} = ?$

$$x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow 25 + y^2 = 169 \Rightarrow y^2 = 144$$

$$\therefore y = 12\ m$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0\,]\ \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 5\,(4) + 12\frac{dy}{dt} = 0$$

$$20 + 12\,\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12\,\frac{dy}{dt} = -20$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-20}{12} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-5}{3} m/s$$

سؤال وزاري ١٩٩٦ / د١ : جد نقطة على الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4x = 4$ يكون عندها معدل إزدياد y مساويا لمعدل إزدياد x .

الحل : $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$

$$x^2 + y^2 - 4x = 4 \ \ldots\ldots(1)$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} - 4\,\frac{dx}{dt} = 0$$

نضع $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$

$$[2x\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dx}{dt} - 4\,\frac{dx}{dt} = 0\,] \div\ 2\,\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x \ \ldots\ldots\ldots(2)$$ نعوض في معادلة (١)

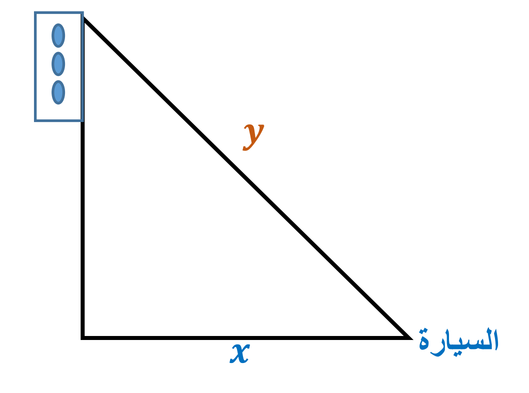
$$x^2 + (2-x)^2 - 4x = 4 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 - 4x = 4$$

$$2x^2 - 8x = 0\,]\ \div 2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$$

$$either\ \ x = 0 \Rightarrow y = 2 - 0 \Rightarrow y = 2$$ النقطة $(0\,,2)$

$or\ \ x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=2-4 \Rightarrow y=-2$ النقطة $(4,-2)$

سؤال وزاري ١٩٩٧/ د١ : سيارة تسير بسرعة $(30\ m/s)$ أجتازت أشارة مرورية حمراء إرتفاعها $(3\ m)$ عن سطح الارض وبعد أن أبتعدت عنها مسافة $(3\sqrt{3}\ m)$ أصطدمت بسيارة أخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية .



الحل : $\frac{dy}{dt}=?\ ,\ \frac{dx}{dt}=30\ m/s\ ,\ y=3\sqrt{3}\ m$

$$y^2=x^2+9$$

$$(3\sqrt{3})^2=x^2+9 \Rightarrow 27=x^2+9$$

$$x^2=18 \Rightarrow x=3\sqrt{2}$$

$$[2y\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}]\div 2$$

$$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt}=3\sqrt{2}(30) \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dt}=\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ m/s$$

سؤال وزاري ٢٠٠٠ / د٢ : اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $(0.5\ cm/s)$ بحيث يظل حجمها دائما مساويا $(320\pi\ cm^3)$ جد معدل تغير نصف قطر القاعدة عندما يكون الارتفاع 5 cm .

الحل :

$$h=5\ cm\ ,\ \frac{dr}{dt}=?\ ,\ v=320\pi\ cm^3\ ,\ \frac{dh}{dt}=0.5\ cm/s$$

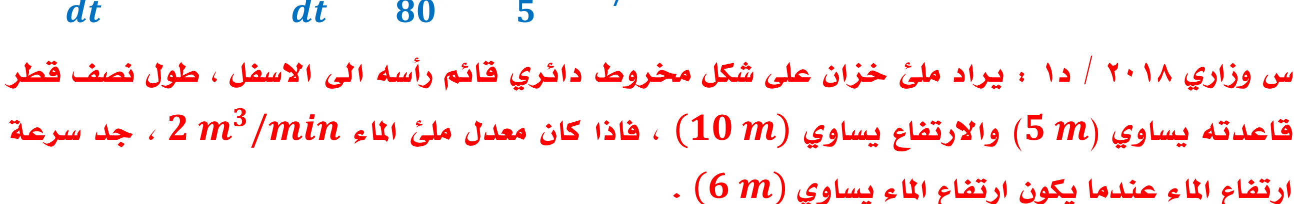
العلاقة $v=\pi r^2 h \Rightarrow 320\pi=\pi r^2 h \Rightarrow \boxed{320=r^2 h}$

$$h=5 \Rightarrow 320=(5)r^2 \Rightarrow r^2=64 \Rightarrow r=8\ cm$$

$$320=r^2 h \overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow} 0=r^2\frac{dh}{dt}+h.2r.\frac{dr}{dt}$$

$$0=64.(0.5)+5.(16).\frac{dr}{dt}$$

$$80\frac{dr}{dt}=-32 \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{-32}{80}=\frac{-2}{5}\ cm/s$$


س وزاري ٢٠١٨ / د١ : يراد ملئ خزان على شكل مخروط دائري قائم رأسه الى الاسفل ، طول نصف قطر قاعدته يساوي $(5\ m)$ والارتفاع يساوي $(10\ m)$ ، فاذا كان معدل ملئ الماء $2\ m^3/min$ ، جد سرعة ارتفاع الماء عندما يكون ارتفاع الماء يساوي $(6\ m)$.

الحل :

نفرض نصف قطر المخروط $=r$

نفرض الارتفاع $=h$

نفرض الحجم $=v$

$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots(1)$

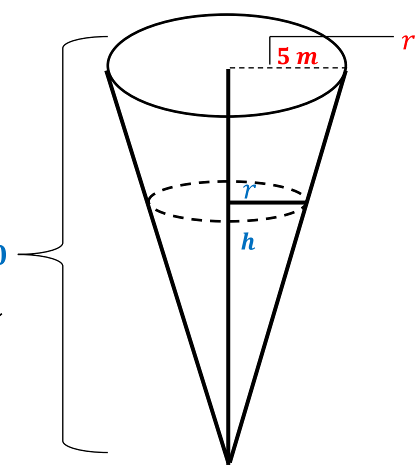
$\tan\theta=\frac{r}{h}=\frac{5}{10}\Rightarrow\frac{r}{h}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2r=h\Rightarrow r=\frac{1}{2}h\ldots\ldots(2)$ نعوض (٢) في (١)

$v=\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 h$

$v=\frac{1}{3}\pi\,\frac{1}{4}h^2.\,h\Rightarrow v=\frac{\pi}{12}h^3$ نشتق

$\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{12}3h^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dh}{dt}$

$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{4}36\frac{dh}{dt}\Rightarrow 2=9\pi\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{2}{9\pi}\ m/min$



مثال : قطعة معدنية على شكل قطع ناقص بمساحة ثابتة تساوي $(60\,\pi)$ وحدة مربعة فإذا أزداد طول محوره الاصغر بمعدل (0.2) وحدة طول / دقيقة فجد معدل النقصان في طول محوره الاكبر عندما يكون طول محوره الاصغر (12) وحدة طول .

الحل :

نفرض طول المحور الاكبر $=2a$

نفرض طول المحور الاصغر $=2b$

العلاقة هي قانون المساحة للقطع الناقص $A=ab\pi$

نشتق العلاقة أعلاه $\frac{dA}{dt}=a\frac{db}{dt}\pi+b\,\pi\frac{da}{dt}\ldots\ldots(1)$ التغير بالمساحة $\frac{dA}{dt}=0$ لأنها ثابتة

$2b=12\Rightarrow b=6$

$A=ab\pi\Rightarrow 60\pi=a\,(6\,\pi)\Rightarrow a=\frac{60\pi}{6\,\pi}=10$ نعوض في (١)

$0=(10)(0.2)\,\pi+6\,\pi\frac{da}{dt}\Rightarrow 6\,\pi\frac{da}{dt}=-2\pi\Rightarrow\frac{da}{dt}=\frac{-2\pi}{6\pi}=\frac{-1}{3}$

∴ معدل النقصان في طول محوره الأكبر $=\frac{1}{3}$ وحدة طول / دقيقة

مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

مبرهنة رول $(Rolle's\ Theorem)$

اذا كانت الدالة f

١) مستمرة في الفترة المغلقة $[a\,,b]$

٢) قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(a\,,b)$

٣) $f\,(b) = f\,(a)$

فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a , b) وتحقق $\acute{f}(c) = 0$

ملاحظات : ١) هذه النظرية تعني هندسيا وجود نقطة واحدة على الاقل تنتمي للمنحني وتكون موازية لمحور السينات.

٢) عند عدم توفر أحد الشروط الثلاثة فإن مبرهنة رول لا تنطبق .

مثال : بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ثم جد قيمة c الممكنة :

a) $f\,(x) = (2-x)^2 \quad , \quad x \in [0\,,4]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة $[0\,,4]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0\,,4)$ لأنها كثيرة حدود

٣) نجد $f\,(0)$, $f\,(4)$

$$f\,(0) = (2-0)^2 = 4 \ , \ f\,(4) = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$$

$\therefore f\,(0) = f\,(4)$ الدالة f تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة

$$\acute{f}(x) = 2\,(2-x)(-1) = -2\,(2-x)$$

$$\acute{f}(c) = -2\,(2-c)$$

$$-2\,(2-c) = 0\,] \div -2$$

$$2 - c = 0 \ \Rightarrow \therefore c = 2 \ \ \in (0\,,4)$$

---

b) $f\,(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \ , \ x \in [-1\,,1]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة $[-1\,,1]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1\,,1)$ لأنها كثيرة حدود

٣) نجد $f(1)$, $f(-1)$

$$f\,(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$$

$f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$

$\because f(-1) \neq f(1)$ الدالة f لا تحقق مبرهنة رول لأن الشرط الثالث لم يتحقق

---

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in [-1, 2] \\ -1 & x \in [-4, -1] \end{cases}$

الحل : مجال الدالة $= [-4, 2]$

$\lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2 = L_1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} -1 = -1 = L_2 \qquad \therefore L_1 \neq L_2$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة لأن الغاية غير موجودة عند $x = -1$ وهو الحد الفاصل للفترة

$\therefore$ الدالة f لا تحقق مبرهنة رول

---

d) $f(x) = k \quad , x \in [a, b]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ لأنها دالة ثابتة .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) لأنها كثيرة الحدود .

٣) $f(a) = k \quad , \quad f(b) = k \quad , \quad f(a) = f(b) = k$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول وإن قيمة c يمكن أن تكون اي قيمة ضمن الفترة (a, b) .

مثال : بين أن هذه الدوال لا تحقق مبرهنة رول :

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \qquad , x \in [0, 5]$

الحل : ١) الدالة غير مستمرة على $[0, 5]$ لأن الدالة غير معرفة .

٢) الدالة غير قابلة للاشتقاق على $(0, 5)$ لأنها غير معرفة عند $x = 3$.

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

---

2) $f(x) = \frac{3x}{2x-4} \qquad , \quad x \in [-1, 3]$

الحل : ١) الدالة غير مستمرة عند $x = 2$ لأنها غير معرفة ، $2 \in [-1, 3]$

٢) الدالة غير قابلة للاشتقاق لأنها غير معرفة عند $x = 2$.

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

---

3) $f(x) = \sqrt[3]{x - 4} \quad , \quad x \in [-1, 5]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1, 5]$

٢) الدالة غير قابلة للاشتقاق على $(-1\,,5)$ لأنها غير معرفة عند $x = 4$

∴ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

ملاحظة : الدالة المطلقة دائما مستمرة على اي فترة ، ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند x التي تجعل الدالة $= 0$.

مثال : هل أن الدالة $\left[\frac{-\pi}{4}\ ,\frac{\pi}{4}\right] \ni x$, $f(x) = cos2x$ تحقق شروط مبرهنة رول ثم جد c إن أمكن ؟

الحل : ١) الدالة مستمرة على $\left[\frac{-\pi}{4}\ ,\frac{\pi}{4}\right]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق ومعرفة على $\left[\frac{-\pi}{4}\ ,\frac{\pi}{4}\right]$

٣) نجد $f(a), f(b)$

$$f\,(a) = f\,\left(-\frac{\pi}{4}\right) = cos\,2\,\left(-\frac{\pi}{4}\right) = cos\,\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f\,(b) = f\,\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\,2\,\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\,\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f\,(a) = f\,(b)$$

$$\acute{f}(x) = -2sin2x$$

$$\acute{f}(c) = -2sin2c \Rightarrow \acute{f}(c) = 0$$

$$-2sin2c = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad , \quad 0 \in \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2c = \pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \notin \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

مثال : جد قيمة c للدالة التي تحقق شروط مبرهنة رول :

الحل :

$$f(x) = sinx + cosx$$

$$\acute{f}(x) = cosx - sin\,x$$

$$\acute{f}(c) = cos\,c - sin\,c \Rightarrow \acute{f}(c) = 0$$

$$cos\,c - sin\,c = 0 \Rightarrow [cos\,c = sin\,c\,] \div cos\,c \Rightarrow 1 = tan\,c$$

$$either\ \ c = \frac{\pi}{4} \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) \quad or \quad c = \frac{5\pi}{4} \notin \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$$

مثال : اذا كانت الدالة $[a\,,3] \ni x$, $f\,(x) = x^2 + 2x + 1$ تحقق شروط المبرهنة رول جد قيمة a

الحل :

∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

$\therefore f(a) = f(3)$

$a^2 + 2a + 1 = 3^2 + 2(3) + 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 16$

$a^2 + 2a - 15 = 0$

$(a+5)(a-3) = 0$

$either \quad a = -5$ غير ممكن يهمل $or \quad a = 3$

مثال : اذا كانت الدالة $f(x) = ax^2 - x^3 \quad , \quad x \in [-2, 3]$ تحقق شروط مبرهنة رول جد قيمة a .

الحل :

$\therefore f(-2) = f(3)$

$a(-2)^2 - (-2)^3 = a(3)^2 - (3)^3$

$4a + 8 = 9a - 27 \Rightarrow 8 + 27 = 9a - 4a \Rightarrow 5a = 35 \Rightarrow a = \frac{35}{5} = 7$

مثال : جد قيمة c التي تحقق شروط مبرهنة رول للدوال الاتية :

1) $f(x) = 8x^2 - x^4 \quad , \quad x \in [-3, 3]$

الحل :

$\acute{f}(x) = 16x - 4x^3$

$\acute{f}(c) = 16c - 4c^3 \Rightarrow \acute{f}(c) = 0$

$[16c - 4c^3 = 0] \div 4$

$4c - c^3 = 0 \Rightarrow c(4 - c^2) = 0 \quad either \; c = 0 \quad or \quad c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm 2$

---

2) $f(x) = \frac{x}{x^2+4} \quad , \quad x \in [-1, 3]$

الحل :

$\acute{f}(x) = \frac{(x^2+4).(1) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$

$\acute{f}(c) = \frac{4-c^2}{(c^2+4)^2} \Rightarrow \acute{f}(c) = 0$

$\frac{4-c^2}{(c^2+4)^2} = 0 \Rightarrow 4 - c^2 = 0 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow \therefore \; c = \pm 2$

$either \quad c = 2 \in (-1, 3) \quad or \quad c = -2$ تهمل

$3)\ f(x) = 5 - x^2 \in [-3, 5]$

الحل :

$$f(a) = f(-3) = 5 - (-3)^2 = 5 - 9 = -4$$
$$f(b) = f(5) = 6 - 2(5) = 6 - 10 = -4$$
$$\therefore\ f(a) = f(b)$$
$$\acute{f}(x) = -2x$$
$$\acute{f}(c) = -2c \Rightarrow \acute{f}(c) = 0$$
$$-2c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-3, 5)$$

$4)\ f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}\ ,\ x \in [0, 8] \qquad , \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}$

الحل :

١) الدالة مستمرة على $[0, 8]$ لأنها معرفة

٢) الدالة قابلة للاشتقاق $\acute{f}(x) = \frac{2x}{3[\sqrt[3]{x}]} - \frac{2}{3[\sqrt[3]{x^2}]}$ لأن مقام المشتقة لا يساوي صفراً ضمن الفترة $(0, 8)$

٣) نجد $f(a)\ , f(b)$

$$f(a) = f(0) = \sqrt[3]{(0)^2} - 2\sqrt[3]{0} = 0$$
$$f(b) = f(8) = \sqrt[3]{8^2} - 2\sqrt[3]{8} = 4 - 4 = 0$$
$$\because f(a) = f(b)$$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

$$\acute{f}(x) = \frac{2x}{3[\sqrt[3]{x}]} - \frac{2c}{3[\sqrt[3]{x^2}]}$$
$$\acute{f}(c) = \frac{2c}{3[\sqrt[3]{c}]} - \frac{2}{3[\sqrt[3]{c^2}]} \quad , \quad \acute{f}(c) = 0$$
$$\frac{2c}{3[\sqrt[3]{c}]} - \frac{2}{3[\sqrt[3]{c^2}]} = 0 \Rightarrow \frac{2c}{3[\sqrt[3]{c}]} = \frac{2}{3[\sqrt[3]{c^2}]}$$ بالتكعيب
$$\frac{c}{c} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c^3 = c \Rightarrow c^3 - c = 0 \Rightarrow c(c^2 - 1) = 0$$
$$either\ \ c = 0 \quad or \quad c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c = \mp 1$$

مثال : هل أن الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة رول ثم جد قيمة C الممكنة ؟

1) $f(x) = \sqrt{9-x^2} \qquad x \in [2\,,3]$

الحل :

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \mp 3$$

١) الدالة مستمرة على الفترة $[-3\,,3]$ فتكون مستمرة على الفترة الجزئية $[2\,,3]$

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-3\,,3)$ ففي هذه الحالة هي قابلة للاشتقاق على الفترة الجزئية $(2\,,3)$

٣) نجد $f(a)\ ,f(b)$

$$f\,(a) = f\,(2) = \sqrt{9-(2)^2} = \sqrt{5}$$

$$f\,(b) = f\,(3) = \sqrt{9-(3)^2} = \sqrt{9-9} = 0 \quad \therefore \quad f(a) \neq f(b)$$

$\therefore$ لا تحقق شروط مبرهنة رول $\therefore$ لا يمكن ايجاد قيمة (c)

2) $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1} \quad , \quad x \in [-2\,,3]$

١) الدالة غير مستمرة على $[-2\,,3]$ لأنها غير معرفة عند $x = 1$

$\therefore$ الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول

---

3) $f\,(x) = \frac{x+3}{x-4} \quad , \quad x \in [1\,,3]$

١) الدالة مستمرة على $[1\,,-3]$ ، لأنه لا يوجد عدد ضمن الفترة المعطاة يجعل المقام = صفر

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(1\,,-3)$

٣) نجد $f(a)\ ,f(b)$

$$f(1) = \frac{1+3}{1-4} = \frac{4}{-3}\ ,\ f\,(3) = \frac{3+3}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$$

$\therefore$ الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول لأن $f\,(1) \neq f\,(3)$

---

4) $f\,(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & x \in [-3\,,5] \\ 6 - 2x & x \in (1\,,5) \end{cases}$

الحل :

أولاً : الاستمرارية لمجال الدالة هي $[-3\,,5]$

$$1)\ f(1) = 4 - 1 = 4$$

$2)\ L_1 = \lim_{x\to 1}(6-2x) = 6-2(1) = 4$

$L_2 = \lim_{x\to 1}(5-x^2) = 5-1 = 4$, الغاية موجودة $L_1 = L_2$

$3)\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 4$ ∴ الدالة مستمرة عند $x = 1$

ثانيا : قابلية الاشتقاق $\acute{f}(x) = -2x$ ، عند $x = 1$

$\acute{f}(x) = -2x$

$\acute{f}(c) = -2c = 0 \Rightarrow c = 0$

$0 \in [-3, 5]$

مثال : بين هل ان مبرهنة رول تتحقق على الدوال الاتية ثم جد قيمة c عند تحقق المبرهنة ؟

$1)\ f(x) = \sin x \quad , \quad [0, 2\pi]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$ لأنها دالة دائرية .
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$.
٣) نجد $f(2\pi)$, $f(0)$

$f(0) = \sin(0) = 0$

$f(2\pi) = \sin(2\pi) = 0$

$f(0) = f(2\pi)$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\acute{f}(c) = 0$

$f(x) = \sin x \Rightarrow \acute{f}(x) = \cos x$

$\acute{f}(c) = \cos c \Rightarrow \cos c = 0$

$either\ \ c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi) \quad , \quad or\ \ c = \frac{3\pi}{2} \in (0, 2\pi)$

$2)\ f(x) = 9 \quad , \quad [5, 9]$

الحل : ١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[5, 9]$ لأنها دالة ثابتة .
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(5, 9)$.
٣) نجد $f(9)$, $f(5)$

$f(5) = 9 \quad , \quad f(9) = 9$

$f(5) = f(9)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول وان قيمة (c) يمكن ان تكون ضمن الفترة $(5, 9)$

3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad , \; x \in [-2, 5]$

الحل :

$\because \; 16 - x^2 = 0 \implies x^2 = 16 \implies x = \pm 4$ $\quad [-4, 4]$ أوسع مجال للدالة

١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-4, 4]$ لأنها مستمرة على المجموعات الجزئية .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-4, 4)$

٣) نجد $f(2) \; , \; f(-2)$

$$f(2) = \sqrt{16 - (2)^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$f(-2) = \sqrt{16 - (-2)^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \qquad \therefore \; f(-2) = f(2)$$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\acute{f}(c) = 0$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} \implies \acute{f}(c) = \frac{-c}{\sqrt{16 - c^2}} \implies \acute{f}(c) = 0$$

$$\frac{-c}{\sqrt{16 - c^2}} = 0 \implies -c = 0 \implies c = 0 \in [-4, 4]$$

مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا كانت f مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي الى الفترة (a, b) وتحقق :

$$\acute{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{أو} \quad f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b - a)$$

١) المماس // الوتر اي ان ميلاهما متساويان



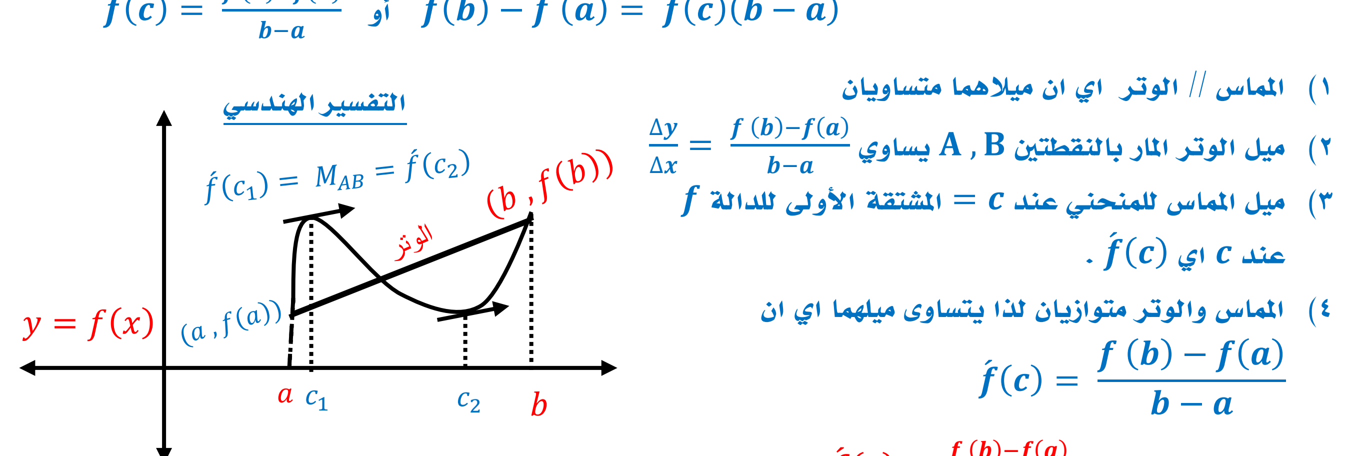
٢) ميل الوتر المار بالنقطتين A, B يساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

٣) ميل المماس للمنحني عند c = المشتقة الأولى للدالة f عند c اي $\acute{f}(c)$.

٤) المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلهما اي ان

$$\acute{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

التفسير الهندسي



لإيجاد قيمة c التي تحقق $\acute{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ يجب توفر الشرطين التاليين :

١- ان تكون f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$

٢- ان تكون f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)

ملاحظة :

إن مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة ففي مبرهنة رول يجب توافر شرط ثالث هو $f(a) = f(b)$ اي ان الوتر والمماس يوازيان محور السينات اي ان فرق الصادات $= 0$ لذا يصبح الميل $= 0$ فنحصل على $\acute{f}(c) = 0$

مثال : جد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لكل من الدوال الاتية :

a) $f(x) = x^2 - 6x + 4 \quad , x \in [-1, 7]$ وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل : ١) الدالة مستمرة في الفترة $[-1, 7]$ لأنها كثيرة الحدود .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 7)$ لأنها كثيرة حدود

$$\acute{f}(x) = 2x - 6$$

$\acute{f}(c) = 2c - 6$ ميل المماس

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)} = \frac{11-11}{8} = 0$ ميل الوتر

$\because$ ميل المماس = ميل الوتر

$$2c - 6 = 0 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$$

---

b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad , x \in [-4, 0]$

الحل : $\because$ أوسع مجال للدالة

$$25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 25 = x^2 \Rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow x \in [-5, 5]$$

١) نبحث الاستمرارية في الفترة $[-4, 0]$

$$\forall a \in [-4, 0] \Rightarrow f(a) = \sqrt{25 - a^2} \in R$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25} = 5$$

$\therefore$ الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-4, 0]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق عند الفترة المفتوحة $(-4, 0)$

$$f(x) = (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$ ميل المماس

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0)-f(-4)}{0+4} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{1}{2} = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} \Rightarrow -2c = \sqrt{25 - c^2}$ بالتربيع

$$4c^2 = 25 - c^2 \Rightarrow 4c^2 + c^2 = 25 \Rightarrow 5c^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c == \pm\sqrt{5}$$

$either \quad c = \sqrt{5} \quad \notin (-4 \,, 0)$

$or \qquad c = -\sqrt{5} \in (-4 \,, 0)$

---

c) $f(x) = 2x + \sin x \quad , \quad x \in [0 \,, \pi]$

الحل :

١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0 \,, \pi]$ لأنها دالة دائرية

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0 \,, \pi)$

$\because$ الشروط متحققة فإن مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

$f(x) = 2x + \sin x \Rightarrow \acute{f}(x) = 2 + \cos x \Rightarrow \acute{f}(c) = 2 + \cos (c)$ ميل المماس

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(2\pi + \sin \pi)-0}{\pi - 0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ميل الوتر

$\because$ ميل المماس = ميل الوتر $\quad 2 + \cos (c) = 2 \Rightarrow \cos (c) = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \in (0 \,, \pi)$

مثال : اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ ، $f : [0 \,, b] \to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة b . وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل :

$f(x) = x^3 - 4x^2 \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2 - 8x$

$\acute{f}(c) = 3c^2 - 8c$

$\acute{f}\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - 8\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3} = -4$ ميل المماس

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(0)}{b-0} = \frac{b^3-4b^2-0}{b} = b^2 - 4b$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$$b^2 - 4b = -4 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow (b-2)(b-2) = 0 \Rightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

التقريب بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة (نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة)

اذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على $[a \,, b]$ وقابلة للاشتقاق في $(a \,, b)$ ولو اعتبرنا $(h = b - a)$ فان $b = a + h$ حيث $h \in R \,, h \neq 0$ فإنه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{h} \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow \boxed{f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(c)}$

وعندما يكون اقتراب b من a قربا كافيا تكون في هذه الحالة h صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايته قريبتان من a ، اي ان المماس عند c سيكون مماسا للمنحني عند نقطة قريبة جدا من النقطة $(x = a)$ ولذلك يصبح :

$\boxed{f(a + h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a)}$ ويقال لـ $h\acute{f}(a)$ التغيير التقريبي للدالة .

ملاحظة : لإيجاد القيمة التقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة نتبع ما يلي :

١) نفرض دالة على شكل السؤال ونختار قيمة لـ a قريبة من القيمة المعطاة في السؤال بحيث تخرج $f\,(a)$ مضبوطة ونجد $f\,(a)$

٢) نجد قيمة h حيث $h = b - a$

٣) نجد $\acute{f}\,(a)$

٤) نطبق القانون $f\,(a + h) \cong f\,(a) + h\,\acute{f}\,(a)$ حيث $h\,\acute{f}\,(a)$ هو التغيير التقريبي للدالة .

النوع الأول : عندما تكون الدالة موجودة في السؤال

مثال : اذا كان $f\,(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية $f\,(1.001)$.

الحل :

$a = 1$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 1.001$ نفرض

$$h = b - a \Longrightarrow 1.001 - 1 = 0.001$$
$$f\,(a) = a^3 + 3a^2 + 4a + 5$$
$$f\,(1) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Longrightarrow \acute{f}(1) = 3 + 6 + 4 = 13$$
$$f\,(a + h) \cong f\,(a) + h\,\acute{f}(a)$$
$$f\,(1 + 0.001) \cong f\,(1) + (0.001)\acute{f}(1) \Longrightarrow f\,(1.001) \cong 13 + (0.001)(13)$$
$$f\,(1.001) \cong 13 + (0.013) \cong 13.013$$

النوع الثاني : عندما تكون الدالة غير موجودة في السؤال

مثال : جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسبا للعدد $\sqrt{26}$

الحل :

$a = 25$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 26$ نفرض

$$h = b - a = 26 - 25 = 1$$
$$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f(a) = \sqrt{a} \Longrightarrow f(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$\acute{f}(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{2(5)} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$f\,(a\ + h) \cong f\,(a) + h\,\acute{f}(a)$$

$$f\,(25 + 1) \cong f\,(25) + \ (1)\acute{f}(25) \Longrightarrow f\,(26) \cong 5 + (1)(0.1) = 5.1$$

مثال : اذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$ جد قيمة تقريبية للدالة $f(\,1.002)$

الحل :

$a = 1$ نفرض

$b = 1.002$ نفرض

$h = b - a = 1.002\ - 1\ =\ 0.002$

$y = \sqrt[3]{3x+5}$

$y' = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}}$

$h = 1.002\ - 1\ =\ 0.002$

$f(a) = \sqrt[3]{3(1)+5} = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'(a) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3(1)+5)^2}} = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4} = 0.25$

$hf'(a) = (0.002)(0.25) = 0.00050 = 0.0005$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)\ \cong 2 + 0.0005 \cong 2.0005$

مثال : جد التغير التقريبي للمقدار $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (\,0.98)^3 + 2$

الحل :

$a = 1$ نفرض

$b = 0.98$ نفرض

$h = b - a\ =\ 0.98 - 1\ = -0.02$

$y = \sqrt[5]{x^3}\ +\ x^3 +\ 1\ =\ x^{\frac{3}{5}} +\ x^3 + 1$

$y' = \frac{3}{5}\ x^{\frac{-2}{5}} + 3x^2$

$f'\,(\,a) =\ f'(1) = \frac{3}{5}\ (1)^{\frac{-2}{5}} + 3\ (1)^2 = \frac{3}{5} + 3 = 3.6$

$h\,f'(a\,) = -0.02\ (3.6) = -0.012$

مثال : اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدتها حجمها 124π جد نصف قطر قاعدتها بصورة تقريبية .

الحل :

$a = 125$ نفرض

$b = 124$ نفرض

$h = b - a = 124 - 125 = -1$ $\boxed{h = r}$

$v = \pi r^2 h \Rightarrow r = \pi r^2 . r \Rightarrow v = \pi r^3 \Rightarrow 124\pi = \pi r^3$

$r^3 = 124 \Rightarrow r = \sqrt[3]{124}$

$y = \sqrt[3]{x}$, $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f(a) = f(125) = \sqrt[3]{125} = 5$

$f'(a) = f'(125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$

$h f'(a) = (-1).(0.013) = -0.013$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a) \cong 5 - 0.013 \cong 4.987$

ملاحظة : اذا كان المطلوب ايجاد حجم المادة او كمية المادة نكتفي بإيجاد $h f'(a)$

ثالثا : عندما يكون في السؤال عبارة من قانون مساحة او حجم او ما شابه ذلك

مثال : كرة مجوفة قطرها $3cm$ وسمك الغلاف $0.2cm$ جد حجم المادة المصنوعة منها .

الحل :

$a = 3$

$h = 0.2$

$v = \frac{4}{3} r^3 \pi$

$y = \frac{4\pi}{3} x^3$, $y' = 4\pi x^2$

$f'(a) = f'(3) = 4\pi(3)^2 = 36\pi$

$f'(a) = (0.2)(36\pi) = 7.2\pi$ حجم المادة المصنوعة

مثال : مكعب طول حرفه 9.98 cm جد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل : ليكن v حجم المكعب الذي طول حرفه x .

$v(x) = x^3$

$\begin{cases} b = 9.98 \\ a = 10 \end{cases} \Rightarrow h = b - a = -0.02$

$v(10) = 10^3 = 1000$

$v(a) = a^3$

$v'(a) = 3a^2 \Rightarrow v'(10) = 3(10)^2 = 300$

$v(a + h) \cong v(a) + h\acute{v}(a)$

$v(10 + (-0.02)) \cong v(10) + (-0.02)v'(a)$

$v(9.98) \cong 1000 + (-0.02)(300) \cong 994\ cm^3$

مثال : لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغيير التقريبي للدالة .

الحل : $b = 8.06$, $a = 8$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$h = b - a = 8.06 - 8 = 0.06$

$\acute{f}(a) = \acute{f}(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3(2)} = \frac{1}{3}$

$h\acute{f}(a) \cong (0.06)\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0.02$ مقدار التغيير التقريبي

ملاحظة : اذا كان التغير x له قيمتان تكتفي بإيجاد $h\,f'(a)$ والقيمة الاخرى a .

مثال : يراد طلاء مكعب طول حرفه 10 cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15 cm أوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وبأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل : ليكن v حجم المكعب الذي طول حرفه x

نفرض $a = 10$ اقرب رقم للعدد المعطى

نفرض $b = 10.3$

$h = b - a = 10.3 - 10 = 0.3$

$v(x) = x^3 \Rightarrow \acute{v}(x) = 3x^2$

$\acute{v}(a) = 3a^2 \Rightarrow v'(10) = 3(10)^2 = 300$

$h\,\acute{v}(a) \cong h\,\acute{v}(10) = (0.3)(300) \cong 90\ cm^3$ حجم الطلاء بصورة تقريبية

مثال : بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقدر بالثلاث مراتب عشرية على الاقل كلاً مما يأتي :

a) $\sqrt[3]{7.8}$ وزاري ٢٠١١ / د١

$a = 8$ نفرض

$b = 7.8$ نفرض

$h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$\acute{f}(a) = \acute{f}(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a) \implies f\big(8 + (-0.2)\big) \cong f(8) + (-0.2)\,\acute{f}(8)$

$f(7.8) \cong f(8) + (-0.2) \cong 2 - (0.2)(0.083) \cong 2 - 0.0166 \cong 1.9834$

---

b) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

$a = 16$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 17$ نفرض

$h = 17 - 16 = 1$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} \implies f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} \implies \acute{f}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{-3}{4}}$

$f(16) = (2^4)^{\frac{1}{2}} + (2^4)^{\frac{1}{4}} = 4 + 2 = 6$

$\acute{f}(16) = \frac{1}{2}(2^4)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(2^4)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}(2)^{-2} + \frac{1}{4}(2)^{-3}$

$\acute{f}(16) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32}$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a)$

$f(17) \cong f(16) + (1)\acute{f}(16) \cong 6 + (1)(0.156) \cong 6.156$

---

c) $\sqrt[3]{0.12}$

$a = 0.125$ نفرض

$b = 0.120$ نفرض

$h = b - a = 0.120 - 0.125 = -0.005$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f\,(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$$

$$\acute{f}(0.125) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(0.125)^2}} = \frac{1}{3\,(0.5)^2} = \frac{1}{3\,(0.25)} = \frac{1}{0.75} = 1.333$$

$$f\,(a + h) \cong f\,(a) + h\,\acute{f}\,(a)$$

$$f(0.12) \cong f(0.125) + (-0.005)(1.333)$$

$$f(0.12) \cong 0.5 - 0.006665 \cong 0.493335$$

مثال : مخروط دائري قائم ارتفاعه ثلاثة امثال نصف قطره فإذا كان نصف قطره 1.90 جد حجمه بصورة تقريبية وبإستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل :

$a = 2$ نفرض

$b = 1.9$ نفرض

$$h = b - a = 1.9 - 2 = -0.1$$

$$h = 3\,(r) \Rightarrow h = 3r$$

$$v = \frac{\pi}{3}\,r^2\,h \Rightarrow v = \frac{\pi}{3}\,r^2.3r \Rightarrow v = \pi\,r^3$$

$$v = \pi\,x^3 \quad , \quad v' = 3\,x^2\pi$$

$$f(a) = f(2) = \pi(2)^3 = 8\pi$$

$$f'(a) = f'(2) = 3\pi(2)^2 = 12\pi$$

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) \Longrightarrow f\big(2+(-0.1)\big) = 8\pi - 1.2\pi = 6.8\pi$$

حل تمارين (3 – 3)

س1: أوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

a) $f\,(x) = x^3 - 9x \quad , \quad x \in [-3\,,3]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-3\,,3]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-3\,,3)$ لأنها كثيرة حدود

٣) نجد $f\,(3) \quad , \quad f\,(-3)$

$$f\,(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$$

$$f\,(3) = (3)^3 - 9(3) = 27 - 27 = 0$$

$f(-3) = f(3)$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول نفرض $\acute{f}(c) = 0$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 9$

$\acute{f}(c) = 3c^2 - 9$

$3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{3} \in (-3, 3)$

---

b) $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ لأن $0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(\frac{1}{2}, 2)$ لأن $0 \notin (\frac{1}{2}, 2)$

٣) نجد $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

$$f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول نفرض $\acute{f}(c) = 0$

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = 2x + 2x^{-1}$$

$$\acute{f}(x) = 2 - 2x^{-2} = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\acute{f}(c) = 2 - \frac{2}{c^2} \Rightarrow 2 - \frac{2}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{2c^2 - 2}{c^2} = 0 \Rightarrow 2c^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2c^2 = 2$$

$\therefore c^2 = 1 \Rightarrow \therefore c = 1 \in (\frac{1}{2}, 2)$ نهمل السالب $c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

---

c) $f(x) = (x^2 - 3)^2$, $x \in [-1, 1]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1, 1]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1, 1)$

٣) نجد $f(1)$, $f(-1)$

$f(-1) = (1 - 3)^2 = 4$

$f(1) = (1-3)^2 = 4 \qquad \therefore f(-1) = f(1)$

∴الدالة تحقق مبرهنة رول نفرض $\acute{f}(c) = 0$

$\acute{f}(x) = 2(x^2-3).2x = 4x(x^2-3)$

$f(c) = 4c(c^2-3) \Rightarrow 4c(c^2-3) = 0 \Rightarrow 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-1,1)$

$or\ c^2 - 3 = 0 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{3} \notin (-1,1)$

س2: جد تقريبا لكل مما يلي بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة :

a) $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

$a = 64$ نفرض

$b = 63$ نفرض

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} \Rightarrow f(64) = 8 + 4 = 12$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \acute{f}(64) = \dfrac{1}{2\sqrt{64}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$

$\acute{f}(64) = \dfrac{1}{2(8)} + \dfrac{1}{3(16)} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{48} = \dfrac{3+1}{48} = \dfrac{4}{48} = \dfrac{1}{12}$

$\acute{f}(64) = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a)$

$f(64 + (-1)) \cong f(64) + (-1)\acute{f}(64) \cong 12 - 0.083 = 11.917$

---

b) $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

$a = 1$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 1.04$ نفرض

$h = 1.04 - 1 = 0.04$

$f(x) = x^3 + 3x^4$

$f(1) = 1 + 3 = 4$

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 12x^3$

$\acute{f}(1) = 3 + 12 = 15$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a)$

$$f(1.04) \cong f(1) + (0.04)(15) \cong 4 + 0.6 = 4.6$$

---

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$a = 8$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 9$ نفرض

$h = 9 - 8 = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{3} x^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f'(a) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{a^4}}$$

$$f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$f'(8) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{(2)^4} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{-1}{48}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$$

$$f(8+1) \cong f(8) + (1) f'(8)$$

$$f(9) \cong \frac{1}{2} + \frac{-1}{48} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \cong \frac{24-1}{48} = \frac{23}{48} = 0.479$$

---

d) $\frac{1}{101}$

$a = 100$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 101$ نفرض

$h = 101 - 100 = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = -x^{-2}$$

$$f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$f'(100) = -(100)^{-2} = \frac{-1}{(100)^2} = \frac{-1}{10000} = -0.0001$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$$

$$f\,(100+1) \cong f\,(100) + \,(1)\acute{f}(100)$$
$$f\,(101) \cong 0.01 + (-0.0001) \cong 0.01 - 0.0001 \cong 0.0099$$

---

e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

$a = 0.49$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 0.50$ نفرض

$$h = 0.50 - 0.49 = 0.01$$
$$f\,(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f\,(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$$
$$\acute{f}(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2\,(0.7)} = \frac{1}{1.4} = \frac{10}{14} = 0.714$$
$$f\,(a+h) \cong f\,(a) + \,h\,\acute{f}(a)$$
$$f\,(0.49+0.01) \cong 0.7 + (0.01)(0.714)$$
$$f\,(0.50) \cong 0.7 + 0.00714 \cong 0.70714$$

س3 : كرة نصف قطرها $(6\ cm)$ طليت بطلاء سمكه $(0.1\ cm)$ جد كمية الطلاء بصورة تقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة . وزاري ٢٠١٤ / د١

الحل : حجم كمية الطلاء = حجم الكرة مع الطلاء − حجم الكرة

نفرض اقرب رقم للعدد المعطى $a = 6$

نفرض $b = 6.1$ وهو يمثل نصف القطر للكرة مضافا له كمية الطلاء

$$h = 6.1 - 6 = 0.1$$
$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\acute{v}(x) = \frac{4}{3}\pi\, 3x^2 = 4\,\pi\, x^2$$
$$\acute{v}(a) = 4\,\pi\, a^2$$
$$\acute{v}(6) = 4\,\pi\,(6)^2 = 144\,\pi$$

$h\,\acute{v}(a) = (0.1)(144\,\pi) = 14.4\,\pi$ كمية الطلاء بصورة تقريبية

س4 : كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل :

نفرض الحجم $= v$

نفرض نصف القطر $= r$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 84\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \therefore\ r^3 = 63 \Rightarrow r = \sqrt[3]{63}$$

$a = 64$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 63$ نفرض

$$h = 63 - 64 = -1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\acute{f}(64) = \frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(4^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{48} = 0.02$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)$$

$$f(63) \cong f(64) + (-1)\acute{f}(64) \cong 4 - 0.02 = 3.98\ cm$$

س5 : مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته ، فاذا كان ارتفاعه $2.98\ cm$ فجد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها .

الحل :

نفرض الارتفاع $= h$

نفرض نصف القطر $= r$

$a = 3$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 2.98$ نفرض

$$h = b - a = 2.98 - 3 = -0.02$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad , \quad h = 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2}h$$

$$v = \frac{\pi}{3} h \left(\frac{1}{2}h\right)^2$$

$$v = \frac{\pi}{12} h^3 \Rightarrow \acute{v} = \frac{\pi}{12}\ 3h^2 \Rightarrow \acute{v} = \frac{\pi}{4}\ h^2$$

$v\,(3) = \frac{1}{12}\,\pi\,(3)^3 = 2.25\,\pi$

$\acute{v}(a) = \frac{1}{4}\,\pi\,a^2 \;\Rightarrow\; \acute{v}(3) = \frac{1}{4}\,\pi\,9 = 2.25\pi$

$v\,(a+h) \cong v(a) + \;h\,\acute{v}(a)$

$v\,(2.98) \cong v\,(3) + \;(-0.02)\acute{v}(3) \cong 2.25\,\pi - (0.02)2.25\pi \;\cong 2.25\pi - \;0.045\,\pi$

$v\,(2.98) \cong 2.205\,\pi\,cm^3$

س6 : بين ان كل دالة من الدوال الاتية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة إزاء كل منها ثم جد قيمة c .

a) $f(x) = \;(x-1)^4 \quad , \quad [-1\,,3]$ وزاري ٢٠١١ / د٢

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1\,,3]$ لأنها كثيرة الحدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1\,,3)$ لأنها كثيرة الحدود

٣) نجد $f\,(-1)\,,f\,(3)$

$f\,(-1) = (-1-1)^4 = 16$

$f\,(3) = \;(3-1)^4 = 16$

$\therefore$ الدالة f تحقق مبرهنة رول $f\,(-1) = f\,(3)$

$\acute{f}\,(x) = 4(x-1)^3 \;\Rightarrow\; \acute{f}(c) = \;4\,(c-1)^3 \;\Rightarrow\; 4\,(c-1)^3 = 0$

$(c-1)^3 = 0 \;\;\Rightarrow c-1 = 0 \;\Rightarrow c = 1 \;\in (-1\,,3)$

---

b) $f(x) = x^3 - \;x \quad , \quad [-1\,,1]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1\,,1]$ لأنها كثيرة الحدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1\,,1)$ لأنها كثيرة الحدود

٣) نجد $f\,(1)\,,\;f\,(-1)$

$f\,(-1) = (-1)^3 - \;(-1) = \;-1+1 = 0$

$f\,(1) = (1)^3 - \;(1) = 1-1 = 0$

$\therefore$ الدالة h تحقق مبرهنة رول $f\,(-1) = f\,(1)$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - \;1 \;\Rightarrow\; \acute{f}(c) = 3c^2 - \;1 \;\Rightarrow\; 3c^2 - \;1 = 0$

$3c^2 = \;1 \;\;\Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \;\;\Rightarrow\;\; c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1\,,1) \quad , \quad c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1\,,1)$

c) $g(x) = x^2 - 3x \quad , \quad [-1, 4]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1, 4]$ لأنها كثيرة الحدود
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1, 4)$ لأنها كثيرة الحدود
٣) نوجد $g(-1) \ , \ g(4)$

$$g(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$$

$$g(4) = (4)^2 - 3(4) \Rightarrow 16 - 12 = 4$$

∴ الدالة g تحقق مبرهنة رول $g(-1) = g(4)$

$$\acute{g}(x) = 2x - 3 \Rightarrow \acute{g}(c) = 2c - 3 \Rightarrow 2c - 3 = 0$$

$$2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (-1, 4)$$

---

d) $f(x) = \cos 2x + 2\cos x \quad , \quad [0, 2\pi]$ وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[0, 2\pi]$
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(0, 2\pi)$
٣) نوجد $f(0) \ , \ f(2\pi)$

$$f(0) = \cos(0) + 2\cos(0) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi = 1 + 2 = 3$$

∴ الدالة f تحقق مبرهنة رول $f(0) = f(2\pi)$

$$\acute{f}(x) = -2\sin 2x - 2\sin x \Rightarrow \acute{f}(c) = -2\sin 2c - 2\sin c \qquad \acute{f}(c) = 0$$

$$-2\sin(2c) - 2\sin(c) = 0 \Rightarrow \sin(2c) + \sin(c) = 0$$

$$2\sin(c)\cos(c) + \sin(c) = 0 \Rightarrow \sin(c)[2\cos(c) + 1] = 0$$

$$either\ \sin c = 0 \Rightarrow c = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \Rightarrow c = \pi \in (0, 2\pi)$$

$or \quad 2\cos(c) + 1 = 0 \Rightarrow \cos c = \frac{-1}{2}$ السالب في الربع الثاني والثالث

$c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$ ربع ثاني

$c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$ ربع ثالث

س7 : أختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة ادناه مع ذكر السبب وان تحققت المبرهنة فجد قيم c الممكنة

a) $f(x) = x^3 - x - 1 \ , \ [-1, 2]$

الحل : ١) الدالة f مستمرة على الفترة $[-1\,,2]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1\,,2)$ لأنها كثيرة حدود

الشروط متحققة فهي تحقق القيمة المتوسطة

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 1$

$\acute{f}(c) = 3c^2 - 1$ ميل المماس

$f(-1) = -1 + 1 - 1 = -1$

$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$

$$\acute{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 + 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$ ميل الوتر

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$3c^2 - 1 = 2 \Rightarrow [3c^2 - 3 = 0\ ] \div 3 \Rightarrow c^2 - 1 = 0$

$c^2 = \mp 1 \qquad \therefore c = 1 \in (-1\,,2)$

$c = -1 \notin (-1\,,2)$

---

b) $h(x) = x^2 - 4x + 5 \quad ,[-1\,,5]$

الحل : ١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1\,,5]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\,,5)$ لأنها كثيرة حدود

الشروط متحققة فهي تحقق القيمة المتوسطة

$h(5) = 25 - 20 + 5 = 10$

$h(-1) = 1 + 4 + 5 = 10$

$\acute{h}(x) = 2x - 4 \Rightarrow \acute{h}(c) = 2c - 4$ ميل المماس

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{10 - 10}{6} = 0$$ ميل الوتر

$2c - 4 = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in [-1\,,5]$

---

c) $g(x) = \frac{4}{x+2} \quad , [-1\,,2]$

الحل : ١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1\,,2]$ لأن $-2 \notin [-1\,,2]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\,,2)$ لأن $-2 \notin (-1\,,2)$

الشروط متحققة فهي تحقق القيمة المتوسطة

$$g(x) = 4(x+2)^{-1} \Rightarrow \acute{g}(x) = -4(x+2)^{-2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$g(-1) = \frac{4}{-1+2} = 4$

$g(2) = \frac{4}{2+2} = 1$

$\acute{g}(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$\acute{g}(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)} = \frac{1-4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

$\frac{-4}{(c+2)^2} = -1 \Rightarrow [-(c+2)^2 = -4\ ].-1$

$(c+2)^2 = 4$ جذر الطرفين

$c+2 = \pm 2$

$either\ \ c+2 = 2 \Rightarrow c = 0 \in (-1,2)$

$or\ \ \ \ c+2 = -2 \Rightarrow c = -4 \notin (-1,2)$

---

d) $B(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$, $[-2,7]$

الحل :

١) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2,7]$

٢) الدالة B (x) غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$ لأن $-1 \in (-2,7)$

٣) الدالة B (x) لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لأن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

السبب للاطلاع : (توضيح عدم قابلية الاشتقاق)

$B(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \acute{B}(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\,(x+1)^{\frac{1}{3}}}$

$3\,(x+1)^{\frac{1}{3}} = 0\ ] \div 3 \Rightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} = 0\ \therefore x+1 = 0 \Rightarrow x = -1\ \in [-2,7]$

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد تقريبا لكل مما يأتي باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها :

1) $\sqrt[4]{82}$

$a = 81$ اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 82$

$h = b - a = 82 - 81 = 1$

$f(x) = \sqrt[4]{x} \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$f(a) = \sqrt[4]{a} \Rightarrow f(81) = \sqrt[4]{81} = 3$$

$$\acute{f}(a) = \frac{1}{4a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(81)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(3^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\,(27)} = \frac{1}{108} = 0.009$$

$$f\,(a + h) \cong f\,(a) + h\,\acute{f}(a)$$

$$f\,(81 + 1) \cong f\,(81) + (1)\acute{f}(81) \Rightarrow f\,(82) \cong 3 + (1)(0.009) = 3.009$$

---

2) $\sqrt[3]{0.126}$

$a = 0.125$ اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 0.126$

$h = b - a = 0.126 - 0.125 = 0.001$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

$$f(a) = \sqrt[3]{a} \Rightarrow f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$$

$$\acute{f}(a) = \frac{1}{3}a^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow \acute{f}(0.125) = \frac{1}{3}\,(0.125)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}\,((0.5)^3)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}\,(0.5)^{-2}$$

$$\acute{f}(0.125) = \frac{1}{3\,\,(0.5)^2} = \frac{1}{3\,(0.25)} = \frac{1}{0.75} = 1.3333$$

$$f\,(a + h) \cong f\,(a) + h\,\acute{f}(a)$$

$$f\,(0.125 + 0.001) \cong 0.5 + (0.001)(1.3333)$$

$$f\,(0.126) \cong 0.5 + 0.00133 = 0.50133$$

---

3) $\sqrt[5]{-31}$

$a = -32$ اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = -31$

$h = b - a = -31 - (-32) = 1$

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}$$

$$f(a) = \sqrt[5]{a} \Rightarrow f(-32) = \sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\acute{f}(a)=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}} \Rightarrow \acute{f}(-32)=\frac{1}{5}(-32)^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5}(-2^5)^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5(-2)^4}=\frac{1}{80}=0.0125$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h\acute{f}(a)$$

$$f(-31)\cong f(-32)+(1)\acute{f}(-32) \Rightarrow f(-31)\cong -2+(1)(0.0125)=-1.9875$$

مثال : باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية طول ضلع مربع مساحته $(50\ m^2)$

الحل :

مساحة المربع = مربع طول الضلع

نفرض $a=49$ اقرب رقم للعدد المعطى

نفرض $b=50$

$$h=b-a=50-49=1$$

$$A=x^2 \Rightarrow 50=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{50}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(a)=\sqrt{a} \Rightarrow f(49)=\sqrt{49}=7$$

$$\acute{f}(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \acute{f}(49)=\frac{1}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{14}=0.071$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h\acute{f}(a)$$

$$f(49+1)\cong f(49)+(1)\acute{f}(49) \Rightarrow f(50)\cong 7+(1)(0.071)=7.071$$

دراسة الدالة

النقطة الحرجة : هي النقطة التي تنتمي لمنحني الدالة والتي يكون عندها $\acute{f}(x)=0$ أو تكون غير معرفة.

كيفية ايجاد النقط الحرجة

الحالة الأولى : نجد $\acute{f}(x)$ ثم نجعل $\acute{f}(x)=0$ ثم نحل المعادلة المتكونة ونجد قيم x ولتكن $x_1, x_2, \dots$ ثم نعوض قيم (x) في الدالة الاصلية ونجد قيم (y) المقابلة لها فتكون $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ هي النقط الحرجة.

مثال : جد النقط الحرجة للدوال التالية :

a) $f(x)=3x^2-6x$

$\acute{f}(x)=6x-6 \qquad (\acute{f}(x)=0$ نجعل$)$

$6x-6=0 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1$

$y=f(1)=3(1)^2-6(1)=3-6=-3 \qquad \therefore\ (1,-3)$ نقطة حرجة

b) $f(x)=2x+3$

$\acute{f}(x)=2 \qquad \acute{f}(x)=0$ نجعل

$2=0$ غير ممكن لا توجد نقاط حرجة

c) $f(x) = \frac{3}{x}$

$f(x) = 3x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = -3x^{-2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-3}{x^2}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$\frac{-3}{x^2} = 0 \Rightarrow -3 = 0$ غير ممكن لا توجد نقاط حرجة

الحالة الثانية : اذا أعطيت نقطة حرجة يستفاد من ذلك في ايجاد الثوابت في الدالة المعطاة

مثال : لتكن $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ وكانت للدالة نقطة حرجة هي $(-1, 10)$ فجد قيم الثوابت $a, b \in R$

الحل :

$(-1, 10)$ تحقق دالة المنحنى $\Leftarrow 10 = -1 + a - b + 5 \Leftarrow a - b = 6$ معادلة (١)

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 2ax + b \Leftarrow \acute{f}(-1) = 3(-1)^2 - 2a + b \Leftarrow 3 - 2a + b = 0$ معادلة (٢)

وبحل المعادلتين آنيا نحصل على $b = -9$, $a = -3$

أختبار التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى المحلية

ملاحظة : لإيجاد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة (إن وجدت ونوعها تتبع ما يلي :

١) نجد $\acute{f}(x)$ ونضعها تساوي صفراً ونستخرج قيم x .

٢) نجد صور x وذلك بتعويض قيم x في الدالة الأصلية $f(x)$ فتكون لدينا نقاط حرجة مرشحة .

٣) نختبر قيم x على إشارة $\acute{f}(x)$ ونستخرج مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) .

٤) لمعرفة نوع النقطة ، فاذا كان تغير اشارة المشتقة موجب الى سالب فالنقطة نهاية عظمى محلية ، اما اذا كان تغير اشارة المشتقة من سالب الى موجب فالنقطة نهاية صغرى محلية .

النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية :

لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق عند $(x = c)$ التي تنتمي الى الفترة المفتوحة (a, b) فاذا كان :

اشارة $\acute{f}(x)$: a + + + + + ↗ | c | ↘ − − − − − − b

$F(c)$ نهاية عظمى محلية

اشارة $\acute{f}(x)$: a − − − − − − − ↘ | c | ↗ + + + + + + + b

$F(c)$ نهاية صغرى محلية

ملاحظة : اذا كانت النقطة | حرجة فقط $(+,+)$ or $(-,-)$ | نقطة نهاية صغرى $(-,+)$ | نقطة نهاية عظمى $(+,-)$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $y = f(x) = x^2$

الحل : $\acute{f}(x) = 2x$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$[2x = 0] \div 2 \Rightarrow x = 0$

f متزايدة في $\{x : x > 0\}$

f متناقصة في $\{x : x < 0\}$

اشارة $\acute{f}(x)$: $x < 0$ ($- - - - - - -$) تناقص ↘ | 0 | $x > 0$ ($+ + + + + + +$) تزايد ↗

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى (إن وجدت) لكل مما يأتي :

$1)\ f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

الحل :

$\acute{f}(x) = 9 + 6x - 3x^2 \Rightarrow [9 + 6x - 3x^2 = 0\,] \div -3$

$-3 - 2x + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$either\ \ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$or\ \ \ \ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

اشارة $\acute{f}(x)$: $x < -1$ ($- - - - - -$) تناقص ↘ | -1 ن . ص | $(-1, 3)$ ($+ + + + +$) تزايد ↗ | 3 ن . ع | $x > 3$ ($- - - - - -$) تناقص ↘

f متناقصة في $\{x : x < -1\}, \{x : x > 3\}$

f متزايدة في الفترة المفتوحة $(-1, 3)$

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$ نهاية صغرى محلية $(-1, -5)$

$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3 = 27 + 27 - 27 = 27$ نهاية عظمى محلية $(3, 27)$

$2)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

في هذه الحالة نجعل مقام $\acute{f}(x)$ يساوي صفراً ونستخرج قيمة x .

أما $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$ فتكون $\acute{f}(x)$ غير معرفة اذا كانت $(x = 0)$ اي ان $(x = 0)$ عدد حرج .

$3x^{\frac{1}{3}} = 0\,] \div 3 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 0$ بالجذر التكعيبي $x = 0$

اشارة $\acute{f}(x)$: $x < 0$ ($- - - - -$) تناقص ↘ | 0 | $x > 0$ ($+ + + + +$) تزايد ↗

لا توجد نهايات عظمى أو صغرى

f متزايدة في $\{x : x > 0\}$

f متناقصة في $\{x : x < 0\}$

$3)\ f(x) = 1 + (x - 2)^2$

$\acute{f}(x) = 2(x-2) \Rightarrow [2(x-2) = 0\,] \div 2$ $(\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$f(2) = 1 + (2-2)^2 = 1 + 0 = 1$

$\therefore$ $(2\,,1)$ نهاية صغرى محلية

f متزايدة في $\{x : x > 2\}$

f متناقصة في $\{x : x < 2\}$

ملاحظة : هنالك ثلاث حالات لا يمكن أن نضع فيها $f'(x) = 0$ وهي :

1) اذا كانت $\acute{f}(x) = a$ حيث $a \in R$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = 3x$

الحل : كانت $\acute{f}(x) \neq 0$ $\therefore$ $\acute{f}(x) = 3 > 0$

$\therefore$ الدالة متزايدة $\forall\, x \in R$

يمكن ان تكون الدالة $f(x)$ متناقصة في حالة كون $\acute{f}(x)$ تساوي عدد سالب

2) اذا كانت [مجموع مربعين] = $\acute{f}(x)$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 + x$

الحل : $\acute{f}(x) \neq 0$ $\therefore$ $\acute{f}(x) = 3x^2 + 1 > 0$

$\therefore$ الدالة متزايدة $\forall\, x \in R$

3) إذا كانت $f(x) = \frac{\text{ثابت}}{\text{متغير}}$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

الحل :

نجعل $\acute{f}(x) = 0$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x-2)(1)-(x+1)(1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} \neq 0$$

$$\xleftarrow{\quad - - - - - - - - \ (\searrow) \quad 2 \quad (\nearrow)\ + + + + + + \quad}$$

القيمة التي تجعل المقام $= 0$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة

$y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$ (نجعل $y' = 0$)

$[3x^2 - 3 = 0] \div 3$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$$\xleftarrow{\ + + + + + + + \ (\nearrow) \quad -1 \quad - - - - - - - \ (\searrow) \quad 1 \quad + + + + + + + \ (\nearrow)\ }$$

مناطق التزايد 1) $\{x : x > 1\}$

مناطق التناقص 2) $\{x : x < -1\}$, $(-1, 1)$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة

الحل :

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3 \quad (f'(x) = 0$ نجعل$)$

$[4x^3 = 0] \div 4 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$- - - - - - \; 0 \; + + + + + +$

$\{x : x > 0\}$ مناطق التزايد $\qquad$ $\{x : x < 0\}$ منطقة التناقص

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى والنقاط الحرجة ان وجدت

$f(x) = (x+1)^3$

الحل :

$f'(x) = 3(x+1)^2 - (1) = 3(x+1)^2$

$[3(x+1)^2 = 0] \div 3 \Rightarrow (x+1)^2 = 0$ بالجذر

$+ + + + + + \; -1 \; + + + + + +$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $\qquad$ نقطة حرجة مرشحة ولا توجد نقاط نهايات

$\{x : x < -1\} , \{x : x > -1\}$ الدالة متزايدة

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص ونقاط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة ان وجدت

الحل :

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $\qquad$ في الدالة الكسرية تحتاج الى مجال الدالة لايجاد النقطة الحرجة

$R/\{1\}$ $\qquad$ مجال الدالة هو

$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad , \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow -2 = 0$ غير ممكن

النقطة الحرجة هي $x = 1$ التي تجعل المقام يساوي صفر

$- - - - - - - - \; 1 \; - - - - - - - -$

$\{x : x < 1\} , \{x : x > 1\}$ الدالة متناقصة في

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص ونقاط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة

$f(x) = -1(x-2)^2$

الحل :

$f'(x) = -2(x-2)(1) = -2x + 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow [-2x + 4 = 0] \div -2$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f'(x)$ اشارة: $+ + + + + +$ | 2 | $- - - - - - - -$

مناطق التزايد $\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 2\}$

$f(2) = 1 - (2-2)^2 = 1$

$(2,1)$ نقطة حرجة ، $(2,1)$ نهاية عظمى محلية

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة مبينا نوعها ان وجدت في الدالة $f(x) = x^5$

الحل :

$f'(x) = 5x^4 \quad (f'(x) = 0$ نجعل$)$

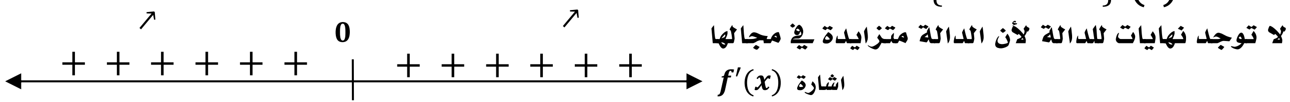
$[5x^4 = 0] \div 5 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0,0)$ نقطة حرجة

مناطق التزايد (1) $\{x : x > 0\}$

(2) $\{x : x < 0\}$

لا توجد نهايات للدالة لأن الدالة متزايدة في مجالها



مثال : جد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة مبينا نوعها ان وجدت

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل :

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 18x + 24 \quad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0$

$either \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$or \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\acute{f}(x)$ اشارة: تزايد $+ + + + +$ | 2 | تناقص $- - - - -$ | 4 | تزايد $+ + + + +$

f متناقصة في الفترة $(2, 4)$

f متزايدة في $\{x : x < 2\}, \{x : x > 4\}$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20$ $(2, 20)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16$ $(4, 16)$ نقطة نهاية صغرى محلية

تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(a\ ,b)$ فيقال عن الدالة f بأنها محدبة اذا كانت $f'(x)$ متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة اذا كانت $f'(x)$ متزايدة خلال تلك الفترة .

ملاحظة : لإيجاد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب نتبع ما يلي :

1) نجد $\acute{\acute{f}}(x)$ ونضعها تساوي صفراً ونستخرج قيم x .

2) اذا كانت $f''(x)$ موجبة $[f''(x) > 0]$ فالدالة مقعرة .

اذا كانت $f''(x)$ سالبة $[f''(x) < 0]$ فالدالة محدبة .

3) نعوض قيم x في الدالة الاصلية $f\ (x)$ لايجاد نقطة الانقلاب .

4) اذا لم يحدث تغيير في اشارة المشتقة الثانية فلا توجد هناك نقاط انقلاب للدالة .

نقطة الأنقلاب : هي نقطة تنتمي لمنحنى الدالة وتكون فيها المشتقة الثانية تساوي صفراً او غير معرفة ، والتي يتغير فيها اشارة المشتقة الثانية من تحدب الى تقعر او بالعكس .

مثال : جد نقاط الانقلاب للمنحني : $f\ (x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

الحل :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \Rightarrow f''(x) = 12x - 6 \qquad (f''(x) = 0\ \text{نجعل})$$

$$12x - 6 = 0 \ \Rightarrow 12x = 6 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{-11}{2}$$

f مقعرة في $\{x : x > \frac{1}{2}\}$ لأن $f''(x)$ موجبة

f محدبة في $\{x : x < \frac{1}{2}\}$ لأن $f''(x)$ سالبة

اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$: محدبة ⋒ $- - - - - -$ | $\frac{1}{2}$ | تقعر ⋓ $+ + + + +$

النقطة $(\frac{1}{2}\ ,\frac{-11}{2})$ هي نقطة إنقلاب

مثال : جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب (ان وجدت) للدوال الاتية :

a) $f\ (x) = 4x^3 - \ x^4$

الحل :

$$\acute{f}(x) = \ 12\ x^2 - 4\ x^3 \ \Rightarrow \ \acute{\acute{f}}(x) = \ 24x - 12\ x^2 \qquad (f''(x) = 0\ \text{نجعل})$$

$$[24x - 12\ x^2 = 0\ ] \div 12 \Rightarrow \quad 2x - \ x^2 = 0$$

$$x\ (2 - x) = 0$$

$$either\ \ x = 0$$

$$or\ \ 2 - x = 0 \ \Rightarrow \ \ x \ = 2$$

$x < 0$	0	فترة $(0,2)$	2	$x > 2$	
− − − − − − −		+ + + + + +		− − − − − − −	اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$
محدبة ⋒		تقعر ⋓		محدبة ⋒	

$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4 = 0$ نقطة انقلاب $(0,0)$

$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 32 - 16 = 16$ نقطة انقلاب $(2,16)$

مقعرة في الفترة $(0,2)$ ومحدبة في $\{x : x > 2\}$ ، $\{x : x < 0\}$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$

$f(x) = x + x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = 1 - x^{-2} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = 2x^{-3}$

$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0$

$x < 0$	0	$x > 0$	
− − − − − − −	○	+ + + + +	اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$
محدبة ⋒		تقعر ⋓	

∴ لا توجد نقاط انقلاب لأن 0 لا ينتمي لمجال الدالة فنجعل المقام $= 0$

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

ملاحظة : الحالات الثلاث التي تنطبق على $\acute{f}(x)$ والتي تجعلها لا تساوي صفراً هي نفسها تنطبق على $\acute{\acute{f}}(x)$ وكذلك تنطبق على $f(x)$.

ملاحظة : يستفاد من نقطة الانقلاب في ايجاد الثوابت كما هو الحال في النقطة الحرجة .

c) $h(x) = 4 - (x+2)^4$

$\acute{h}(x) = -4(x+2)^3 \Rightarrow \acute{\acute{h}}(x) = -12(x+2)^2$

$[-12(x+2)^2 = 0] \div (-12) \Rightarrow (x+2)^2 = 0$ بالجذر التربيعي

$\therefore x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x < -2$	-2	$x > -2$	
− − − − − − −		− − − − − − −	اشارة $\acute{\acute{h}}(x)$
محدبة ⋒		محدبة ⋒	

لا توجد نقاط انقلاب عند $x = -2$ ، h محدبة في $\{x : x < -2\}$, $\{x : x > -2\}$

d) $f(x) = 3 - 2x - x^2$

الحل :

$\acute{f}(x) = -2 - 2x \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = -2 < 0 \quad \therefore \acute{\acute{f}}(x) \neq 0$

∴ لا توجد نقاط انقلاب والدالة f محدبة $\forall x \in R$.

e) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 3$

الحل :

$\acute{f}(x) = 4x^3 + 6x \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = 12x^2 + 6 > 0 \quad (\acute{\acute{f}}(x) \neq 0)$

∴ لا توجد نقاط انقلاب والدالة f مقعرة $\forall x \in R$

أستخدام المشتقة الثانية لفحص النهايات العظمى والصغرى المحلية :

من الممكن إستخدام الطريقة الاتية لمعرفة نوع النقطة الحرجة (عظمى أو صغرى)

1. نجد $\acute{f}(x)$ ، $\acute{\acute{f}}(x)$

2. نجد قيم x التي تجعل $\acute{f}(x) = 0$ ونعوضها في $\acute{\acute{f}}(x)$ فإذا كانت الاشارة بعدالتعويض :

a. موجبة فالنقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية صغرى محلية .

b. سالبة فالنقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية عظمى محلية .

c. تساوي صفراً فإن هذه الطريقة فاشلة في معرفة نوع النقطة الحرجة ، ويعاد الاختبار بواسطة الطريقة السابقة عن طريق المشتقة الأولى .

مثال : بإستخدام أختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدوال الاتية:

a) $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

$\acute{f}(x) = 6 - 6x$ $\quad$ ($\acute{f}(x) = 0$ نجعل)

$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6 = 6x \Rightarrow x = 1$

$\acute{\acute{f}}(x) = -6 < 0$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند $x = 1$

$f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1 = 2$

$\therefore$ $(1, 2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

b) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$

$f(x) = x - 4x^{-2} \Rightarrow \acute{f}(x) = 1 + 8x^{-3}$

$\acute{f}(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$

$[1 + \frac{8}{x^3} = 0] \times x^3 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$

$\acute{f}(x) = 1 + 8x^{-3}$

$\acute{\acute{f}}(x) = -24x^{-4} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = \frac{-24}{x^4}$

$\acute{\acute{f}}(-2) = \frac{-24}{(-2)^4} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2} < 0$

$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3$

$\therefore$ $(-2, -3)$ نقطة نهاية عظمى محلية

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$ $\quad$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$[3x^2 - 6x - 9 = 0\ ] \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \ ,\ x = -1$

$\acute{\acute{f}}(x) = 6x - 6$

عندما $x = -1$

فأن $\acute{f}(-1) = 0$, $\acute{\acute{f}}(-1) = -12 < 0$

∴ توجد نهاية عظمى محلية عند $(x = -1)$

∴ النهاية العظمى المحلية هي : $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

عند $x = 3$

فإن $f'(3) = 0$ و $\acute{\acute{f}}(3) = 12 > 0$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $(x = 3)$

∴ النهاية الصغرى المحلية هي : $f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) = 27 - 27 - 27 = -27$

d) $f\ (x) = 4 - (x+1)^4$

$\acute{f}(x) = -4(x+1)^3$ $\quad$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$-4(x+1)^3 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}\ ,\ \boxed{\acute{f}(-1) = 0}$

$\acute{\acute{f}}(x) = -12(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}\ ,\ \boxed{\acute{\acute{f}}(-1) = 0}$

∵ $\acute{\acute{f}}(-1) = 0$ اذن هذه الطريقة لا تنفع لذا نعود الى ملاحظة تغير اشارة $\acute{f}$ بجوار $(x = -1)$

اشارة $\acute{f}(x)$: تزايد ↗ $+ + + + + + +$ ، -1 ، $- - - - - -$ تناقص ↘

f متزايدة في $\{x :\ x\ <\ 0\}$

f متناقصة في $\{x :\ x > -1\}$

∴ توجد نهاية صغرى محلية هي : $f\ (-1) = 4 - (-1+1)^4 = 4$

ايجاد الثوابت

ملاحظات حول أسئلة الثوابت :

1) اذا أعطي في السؤال نهاية عظمى أو صغرى أو نقطة حرجة ، فنجد المشتقة الأولى ، ونعوض النهاية فيها ونجعلها تساوي صفراً .

2) اذا أعطي في السؤال نقطة أنقلاب ، نجد المشتقة الثانية ونعوض نقطة الانقلاب فيها ونجعلها تساوي صفراً .

3) اذا أعطي في السؤال معادلة المماس نتبع ما يلي :

a) نجد ميل المماس من المشتقة الأولى عند نقطة التماس .

b) نجد ميل المماس = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$

c) نساوي الميلين

4) كل زوج مرتب يعطى في السؤال يعوض في الدالة الاصلية

5) كل نهاية لم يذكر الاحداثي لها يعتبر احداثي صادي (y) .

6) كل مستقيم يوازي محور السينات فإن ميله = صفراً

7) المنحنيات المتماسات ميلاهما متساوي .

مثال : عين قيمتي الثابتين $b\,,a$ لكي يكون لمنحنى الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب .

الحل :

$y = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow y' = 3x^2 + 2a\,x + b$

$\because$ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1 \Leftarrow y' = 0$

$0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$3 - 2a + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -3 \ldots\ldots (1)$

$\because$ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 2 \Leftarrow y' = 0$

$0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b$

$12 + 4a + b = 0$

$-2a + b = -3 \quad \ldots\ldots \ (1)$

$\underline{\mp 4a \mp b = \pm 12 \ldots\ldots (2)}$

$-6a = 9 \; a = \frac{-9}{6} \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$ نعوض في (1) تصبح الدالة

$-2\left(\frac{-3}{2}\right) + b = -3 \Rightarrow b = -6$

$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$y' = 3x^2 - 3x - 6$

$y'' = 6x - 3 \quad (y'' = 0$ نجعل$)$

$6x - 3 = 0 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

نقطة الانقلاب هي $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$y = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3 = \frac{1 - 3 - 24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

محدبة $\Cap$ $- - - - - - - -$ | $\frac{1}{2}$ | $+ + + + + + + +$ مقعرة $\Cup$

الدالة f مقعرة في $\{x: x > \frac{1}{2}\}$ ، الدالة f محدبة في $\{x: x < \frac{1}{2}\}$

مثال : اذا كانت الدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a, c \in R$.

الحل :

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f''(x) = 6ax + 6$

$\because$ للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1 \Leftarrow f''(x) = 0$

$6ax + 6 = 0$

$6a(1) + 6 = 0 \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$-3x^2 + 6x = 0\ ] \div 3 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0] \times -1$

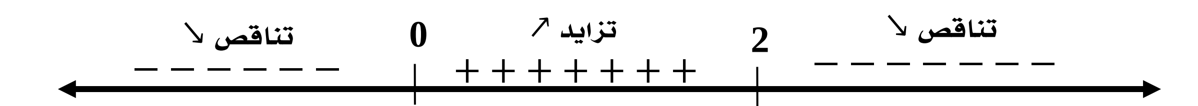
$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$

اما $x = 0$ أو $x = 2$

الدالة تمتلك نهاية عظمى محلية 8 وإن النقطة $(2, 8)$ نقطة نهاية عظمى $x = 2$, $y = 8$ تحقق المعادلة

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c \Rightarrow c = 4$



مثال : لتكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ دالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمة a ثم بين هل ان الدالة تمتلك نهاية عظمى محلية . وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل :

$$f(x) = x^2 + ax^{-1}$$
$$f'(x) = 2x - ax^{-2}$$
$$f''(x) = 2 + 2ax^{-3} = 2 + \frac{2a}{x^3} \qquad \left(f''(x) = 0 \text{ نجعل}\right) \quad , x = 1$$
$$2 + 2a = 0$$
$$2a = 0 - 2 \Rightarrow a = -1$$
$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \qquad \Rightarrow f(x) = x^2 + \left(\frac{-1}{x}\right)$$
$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\left[2x + \frac{1}{x^2} = 0\right].x^2$$
$$2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$
$$f''\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$$

∴ توجد نهاية صغرى عند $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$ ولا تملك نهاية عظمى محلية .

مثال : اذا كان منحني الدالة : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر في $\{x : x < 1\}$ ومحدب في $\{x : x > 1\}$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3, 1)$ فجد قيم الاعداد الحقيقية a, b, c .

الحل : وزاري ٢٠١٤ /د١

∵ الدالة مستمرة لأنها كثيرة حدود ومقعرة في $\{x : x < 1\}$ ومحدبة في $\{x : x > 1\}$

∴ الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$
$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 6a + 2b \qquad (f''(1) = 0 \text{ نجعل})$$
$$6a + 2b = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

∵ ميل المماس للمستقم $y + 9x = 28$ هو $y' = -9$ عند $x = 3$

∴ $f'(3)$ هو الميل للمماس لمنحني الدالة عند $x = 3$

$$f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) = 27a + 6b \text{ (ميل المماس)}$$
$$\therefore 27a + 6b = -9] \div 3$$

$6a + 2b = 0$ .... (1)

$\mp 9a \mp 2b = \pm 3$ .... (2) بالطرح

$-3a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{-3} \Rightarrow a = -1$

وبالتعويض في قيمة a في المعادلة (1) نحصل على :

$6(-1) + 2b = 0 \Rightarrow -6 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \therefore b = 3$

$\therefore (3,1) \ni$ للمنحني $\therefore$ تحقق معادلة المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

$1 = (-1)(3)^3 + 3(3)^2 + c \Rightarrow 1 = -27 + 27 + c \Rightarrow \therefore c = 1$

سؤال واجب : اذا كانت $f(x) = ax^2 + bx + 16$ دالة تمتلك نهاية صغرى محلية $a, b \in R$ جد قيمة a اذا علمت ان $a \in \{-4, 9\}$

حل تمارين (3 – 4)

س1 : لتكن $f(x) = a\,x^2 - 6x + b$ حيث $a \in \{-4, 8\}$, $b \in R$ جد قيمة a اذا كانت :

أ) الدالة f محدبة ب) الدالة f مقعرة

الحل :

$f(x) = a\,x^2 - 6x + b$

$f'(x) = 2a\,x - 6$

$f''(x) = 2a$

أ) الدالة f محدبة

$f''(x) < 0 \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow a = -4$

ب) الدالة f مقعرة

$f''(x) > 0 \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a = 8$

س2: اذا كانت $(2, 6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$ فجد a, b وبين نوع النقطة الحرجة.

الحل :

$\because (2, 6) \ni$ للمنحني $\therefore$ تحقق معادلة المنحني

$f(x) = a - (x - b)^4$

$f'(x) = -4(x - b)^3 \Rightarrow -4(2 - b)^3 = 0\,] \div (-4)$

نجعل $f'(x) = 0$ عندما $x = 2$ لأن النقطة $(2, 6)$ نقطة حرجة .

$(2-b)^3 = 0 \Rightarrow 2-b = 0 \Rightarrow b = 2$

$6 = a - (2-b)^4$ ……… (1)

وبالتعويض عن قيمة (b) في المعادلة (1) نحصل على :

$6 = a - (2-2)^4 \Rightarrow a = 6$

$\therefore \acute{f}(x) = -4(x-b)^3$

$\therefore$ (2 , 6) تمتلك نهاية عظمى محلية

تزايد ↗ $+ + + + + +$ | تناقص ↘ $- - - - -$

$x < 2$ 2 $x > 2$

س3 : اذا كان $f(x) = a x^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f , g متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة f نقطة انقلاب هي $(1 , -11)$ فجد قيمة $a , b , c \in R$. وزاري ٢٠١٤ / د٢

الحل :

$\because$ الدالتين $f(x), g(x)$ متماستان عند نقطة الانقلاب

$\therefore$ ميل الدالتين $f(x), g(x)$ عند $(x = 1)$ متساويان اي ان $\acute{f}(x) = \acute{g}(x)$

$f(x) = a x^3 + bx^2 + cx \Rightarrow \acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g(x) = 1 - 12x \Rightarrow \acute{g}(x) = -12$

$3ax^2 + 2bx + c = -12 \Rightarrow 3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12 \Rightarrow 3a + 2b + c = -12$ … (1)

$\because$ النقطة $(1 , -11)$ نقطة انقلاب للدالة $f(x) \Leftarrow \acute{\acute{f}}(x) = 0$ عندما $x = 1$

$\acute{\acute{f}}(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a + 2b = 0 \,] \div 2 \Rightarrow 3a + b = 0$ …. (2)

النقطة $(1 , -11)$ تحقق معادلة الدالة $f(x)$

$f(x) = a x^3 + bx^2 + cx \Rightarrow -11 = a + b + c$ …. (3)

وبحل المعادلات (1) و (2) و (3) آنيا سوف نحصل على

$3a + 2b + c = -12$ …. (1)

$\mp a \mp b \mp c = \pm 11$ ….. (3) بالطرح

$2a + b = -1$

$\mp 3a \mp b = 0$ ……….. (2) بالطرح

$-a + 0 = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -3a \Rightarrow b = -3$

$c = -11 - a - b = -11 - 1 + 3 \Rightarrow c = -9$

س4: اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني في نقطة انقلابه ؟

الحل :

$f(x) = 3x^2 - x^3 + c \Rightarrow \acute{f}(x) = 6x - 3x^2$ ($\acute{f}(x) = 0$ نجعل)

$6x - 3x^2 = 0\,] \div 3 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$

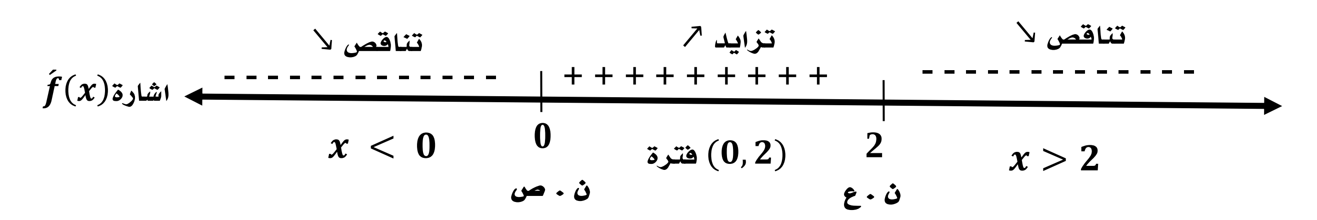
$x = 0 \quad or \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$(0, 6)$ نهاية صغرى محلية وتحقق معادلة المنحني

$f(x) = 3x^2 - x^3 + c \Rightarrow 6 = 3(0)^2 - (0)^3 + c \Rightarrow c = 6$

$\acute{f}(x) = 6x - 3x^2 \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = 6 - 6x$ ($\acute{\acute{f}}(x) = 0$ نجعل)

$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6 = 6x \Rightarrow x = 1$



$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 8$

$(1, 8)$ نقطة انقلاب (نقطة ميل المماس) اي نحسب $\acute{f}(x)$ عندما $x = 1$

$\acute{f}(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 6 - 3 = 3$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = 3(x - 1)$

$y - 8 = 3x - 3 \Rightarrow y - 8 - 3x + 3 = 0$

$y - 3x - 5 = 0$ معادلةالمماس للمنحني

س5 : اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $(\forall x > 1)$ محدبة $(\forall x < 1)$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$. وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

النقطة $(-1, 5)$ تحقق دالة المنحني

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow 5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$-a + b - c = 5 \;\ldots\ldots (1)$

النقطة $(-1, 5)$ نقطة نهاية عظمى محلية للدالة f فنجعل $\acute{f}(x) = 0$ عندما $x = -1$

$\acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$

$3a - 2b + c = 0 \ldots..(2)$

∵ الدالة f مقعرة $(\forall\, x > 1)$ محدبة $(\forall\, x < 1)$ ∴ نجعل $\acute{\acute{f}}(x) = 0$ عندما $x = 1$ لأنه توجد نقطة انقلاب

$\acute{\acute{f}}(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a\,(1) + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \ldots..(3)$

$-a + b - c = 5 \ldots...(1)$

$3a - 2b + c = 0 \ldots..(2)$ بالجمع

$2a - b = 5 \quad] \times 2$

$6a + 2b = 0 \ldots..(3)$

$4a - 2b = 10$

$6a + 2b = 0 \ldots..(3)$ بالجمع

$10a + 0 = 10 \Rightarrow 10a = 10 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2a - 5 = 2 - 5 \Rightarrow b = -3$

$c = -a + b - 5 = -1 + (-3) - 5 \Rightarrow c = -9$

س6 : لتكن $f\,(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ حيث $x \neq 0$ برهن ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية . وزاري ٢٠١٣/د١

الحل :

$f\,(x) = x^2 - a\,x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = 2x + ax^{-2} = 2x + \frac{a}{x^2}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$\left[2x + \frac{a}{x^2} = 0\right] \Rightarrow \frac{a}{x^2} = -2x \Rightarrow a = -2x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{-a}{2} \ldots..(1)$

$\acute{\acute{f}}(x) = 2 - 2ax^{-3} = 2 - \frac{2a}{x^3}$

$\acute{\acute{f}}\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}} = 2 - 2a\left(\frac{-2}{a}\right) = 2 + 4 = 6 > 0\ ,\ \acute{\acute{f}}(x) > 0$

∴ الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة a .

∴ الدالة f تمتلك نهاية صغرى محلية مهما كانت قيمة a .

س7 : المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2\,,-1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a\,,b\,,c \in R$ وما نوع النهاية ؟ وزاري ٢٠١٥ / د١ وزاري ٢٠١٦ /د١

الحل : النقطة $(2\,,-1)$ تحقق معادلة المنحني

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -1 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b + c = -1 \ldots.(1)$

∵ للمنحني نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $\acute{y} = 0$ عندما $x = \frac{1}{2}$

$\acute{y} = 2ax + b \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow 2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \ldots.(2)$

∴ نجد معادلة ميل المستقيم المماس من معادلته $3x - y = 7$

ميل المماس $= \frac{-3}{-1} = 3$

∴ نجد ميل منحني الدالة عند نقطة التماس (اي نجد $\acute{y}$ عندما $x = 2$)

$$\acute{y} = 2ax + b = 2a\,(2) + b \Rightarrow \acute{y} = 4a + b$$

∵ ميل المستقيم المماس = ميل المنحني للدالة عند نقطة التماس

$$\acute{y} = 4a + b \Rightarrow 4a + b = 3 \;\; \ldots.(3)$$

$$a + b = 0 \qquad \ldots.(2)$$

بالطرح $\mp 4a \mp b = \mp 3 \ldots.(3)$

$$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$$ نعوض في (٢)

$$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$ نعوض في (١) لإيجاد c

$$4(1) + 2(-1) + c = -1 \Rightarrow 4 - 2 + c = -1 \Rightarrow 2 + c = -1 \Rightarrow c = -3$$

$$y = x^2 - x - 3$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} - 3 = -3\frac{1}{4}$$

$\left(\frac{1}{2}, -3\frac{1}{4}\right)$ تمثل نهاية صغرى محلية

تناقص ↘ $- - - - -$ | $\frac{1}{2}$ | تزايد ↗ $+ + + + +$

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد ان وجدت مناطق التزايد والتناقص والنقط الحرجة وقيم نقاط النهايات للدوال الاتية :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad (f'(x) = 0$ نجعل$)$

$$3x^2 - 6x = 0] \div 3 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$$

$$either \;\; x = 2 \Rightarrow y = -4 \quad or \;\; x = 0 \Rightarrow y = 0$$

∴ النقط الحرجة هي $(2, -4), (0, 0)$

النقطة $(0, 0)$ نهاية عظمى محلية ، قيمة النهاية العظمى المحلية تساوي (0)

النقطة $(2, -4)$ نهاية صغرى محلية وقيمة النهاية الصغرى المحلية تساوي (-4)

مناطق التزايد $\{x : x < 0\}$

$\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص = الفترة $(0, 2)$

$\nearrow x < 0$ $+ + + + + +$ | 0 | تناقص ↘ $- - - - - - -$ | 2 | $\nearrow x > 2$ $+ + + + + + +$

b) $f(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 2$ $\quad$ ($f'(x) = 0$ لا يمكن جعل) $\quad$ $0 \neq 2$

∴ لا توجد نقط حرجة

مناطق التزايد $\{x : \forall x \in R\}$

$+ + + + + + + \mid + + + + +$

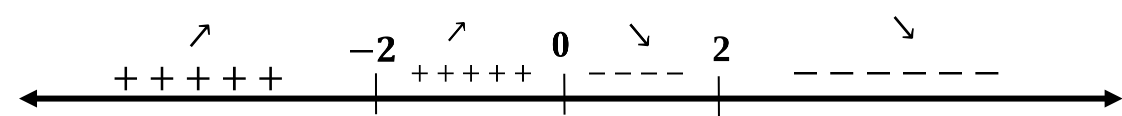
c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)2x - (x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

$$\frac{-10x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -10x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{4}$$

∴ النقطة الحرجة $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ تمثل نهاية عظمى محلية ، قيمة النهاية العظمى المحلية $= -\frac{1}{4}$

مناطق التزايد $\begin{cases} x : x < -2 \\ (-2, 0) \text{ الفترة} \end{cases}$ مناطق التناقص $\begin{cases} x : x > 2 \\ (0, 2) \text{ الفترة} \end{cases}$



مثال : اذا كانت $f(x) = 3 + bx + cx^2$ تمتلك نقطة حرجة هي $(1, 4)$ جد قيمة $b \in R$ ثم بين نوع النقطة الحرجة .

الحل :

$f(x) = 3 + bx + cx^2$

$f'(x) = b + 2cx$ $\quad$ ($f'(x) = 0$ عند الحرجة)

$b + 2cx = 0$ $\qquad$ عند $x = 1$

$b + 2c = 0 \;\ldots\ldots (1)$

$f(x) = 3 + bx + cx^2$ $\qquad$ $(1, 4)$ تحقق المعادلة

$4 = 3 + b + c$

$b + c = 1 \;\ldots\ldots (2)$

$+ + + + + + \mid_1 - - - - - - - -$

$b + 2c = 0 \;\ldots\ldots (1)$

$\mp b \mp c = \mp 1 \;\ldots\ldots (2)$ بالطرح

$c = -1$

$b - 1 = 1 \Rightarrow b = 2$

$f'(x) = 2 - 2x \qquad (f'(x) = 0$ نجعل)

$2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ $\qquad \therefore (1,4)$ نهاية عظمى محلية

مثال : اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2$ جد قيمة a , b اذا علمت ان للمنحني نقطة انقلاب $(1,2)$. وزاري ٢٠٠٧/د١

الحل :

$\because (1,2)$ تحقق معادلة المنحني

$f(x) = ax^3 + bx^2$

$2 = a(1)^3 + b(1)^2 \Rightarrow a + b = 2 \; \dots \dots \dots (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b \qquad (f''(x) = 0) \qquad (x = 1$ عند)

$6a + 2b = 0] \div 2$

$3a + b = 0 \dots \dots \dots (2)$

$a + b = 2 \dots \dots . \dots (1)$

$\mp 3a \mp b = 0 \dots \dots (2)$ بالطرح

$-2a = 2 \Rightarrow a = -1 \quad (1)$ نعوض قيمة a في معادلة

$-1 + b = 2 \Rightarrow b = 3$

مثال : اذا علمت ان للدالة $f(x) = ax^3 + bx$ حيث $a , b \in R$ نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1 , 2)$ جد قيمة a , b .

الحل :

$f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(-1) = 3a(-1)^2 + b \Rightarrow 3a + b = 0 \; \dots \dots \dots \dots (1)$

$\because (-1 , 2) \ni$ للمنحني $\quad \therefore$ النقطة تحقق معادلة المنحني

$f(x) = ax^3 + bx$

$2 = a(-1)^3 + b(-1) \Rightarrow 2 = -a - b \dots \dots \dots . . (2)$

$3a + b = 0 \; \dots \dots \dots . (1)$

$-a - b = 2 \; \dots \dots \dots . (2)$ بالجمع

$2a = 2 \Rightarrow \therefore a = 1 \Rightarrow 3(1) + b = 0 \Rightarrow 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$

حلول الاسئلة الوزارية حول ايجاد الثوابت

س : اذا كان $(1,6)$ تمثل نهاية صغرى محلية للدالة $f(x) = a x^2 + (x-b)^2$ جد قيمة كل من a , b الحقيقيتين الموجبتين . وزاري ١٩٩٨ / د١

الحل : $\because$ $(1,6)$ تحقق معادلة الدالة والمشتقة عندها تساوي صفر

$f(x) = a x^2 + (x-b)^2$

$6 = a(1)^2 + (1-b)^2$

$6 = a + 1 - 2b + b^2 \ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 2ax + 2(x-b) \Rightarrow 2a(1) + 2(1-b) = 0$

$2a + 2 - 2b = 0 \,]\, \div 2 \Rightarrow a + 1 - b = 0 \Rightarrow a = b - 1 \ldots\ldots (2)$

$\therefore 6 = b - 1 + 1 - 2b + b^2 \Rightarrow b^2 - b - 6 = 0$

$(b-3)(b+2) = 0$

either $b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 3 - 1 = 2$

or $b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ يهمل

س : اذا كان منحنى $f(x) = x^3 - b x^2 + cx$ يمر بالنقطة $(-2,-2)$ وكانت للدالة نقطة أنقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي كل من $b , c \in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية للدالة f . وزاري ١٩٩٩ / د٢

الحل : $\because$ $(-2,-2)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$f(x) = x^3 - b x^2 + cx$

$-2 = (-2)^3 - b(-2)^2 + c(-2) \Rightarrow -2 = -8 - 4b - 2c \,]\, \div 2$

$-1 = -4 - 2b - c \Rightarrow -2b - c = 3 \ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 3x^2 - 2b\,x + c$

$f''(x) = 6x - 2b \Rightarrow 6(1) - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \therefore b = 3$

$-2(3) - c = 3 \Rightarrow -6 - c = 3 \Rightarrow \therefore c = -9$

$f'(x) = 3x^2 - 2(3)x + (-9) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \,]\, \div 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

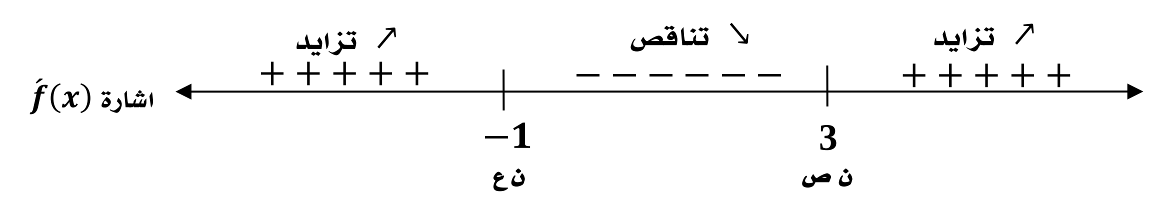
either $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

or $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

$(-1,5)$ نهاية عظمى محلية



س : جد نقطة الانقلاب لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x - 2$ ثم جد معادلة مماس المنحني عند نقطة انقلابه . وزاري ٢٠٠٢ / د٢

الحل :

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = 6x$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -2$ ∴ نقطة الانقلاب $(0, -2)$

ميل المماس $= \acute{f}(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -3(x - 0)$

$y + 2 = -3x \Rightarrow 3x + y + 2 = 0$ معادلة المماس

اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$: تحدب ⋒ $- - - - - - -$ ($x < 0$) | 0 | تقعر ⋓ $+ + + + +$ ($x > 0$)

ن انقلاب

س : لتكن $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ ، $(-1, 2)$ نقطة نهاية عظمى محلية للدالة جد قيمتي $b, c \in R$ هل توجد نقطة أنقلاب للدالة ؟ وزاري ٢٠٠٥ / د١

الحل : ∵ $(-1, 2)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$

$2 = -1 + b - c + 1$

$b - c = 2 \ldots\ldots (1)$

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow 3(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$

$b - c = 2 \quad \ldots (1)$

$-2b + c = -3 \quad \ldots (2)$ بالجمع

$-b = -1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 1 - c = 2 \Rightarrow c = -1$

اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$: تحدب ⋒ $- - - - - - -$ ($x < -\frac{1}{3}$) | $-\frac{1}{3}$ | تقعر ⋓ $+ + + + + + + +$ ($x > -\frac{1}{3}$)

$\acute{\acute{f}}(x) = 6x + 2b = 6x + 2 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = (-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{38}{27}$ نقطة انقلاب $(-\frac{1}{3}, \frac{38}{27})$

س : اذا كانت $f(x) = a\,x^2 - (x+b)^2$ والنقطة $(1, -2)$ حرجة جد قيمة a, b الموجبتين ثم بين نوع النقطة الحرجة . وزاري ٢٠٠٩ / د١

الحل : $\because (1, -2)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$-2 = a - (1+b)^2$

$-2 = a - (1 + 2b + b^2) \Rightarrow -2 = a - 1 - 2b - b^2$

$\therefore -1 = a - 2b - b^2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\acute{f}(x) = 2\,a\,x - 2(x+b) \Rightarrow 2a\,(1) - 2\,(1+b) = 0 \Rightarrow 2a - 2 - 2b = 0\,] \div 2$

$a - 1 - b = 0 \Rightarrow a = 1 + b \ldots\ldots (2)$

$\therefore -1 = 1 + b - 2b - b^2 \Rightarrow b^2 + b - 2 = 0 \Rightarrow (b+2)(b-1) = 0$

$either\ \ b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ يهمل

$or\ \ b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \therefore a = 1 + 1 \Rightarrow a = 2$

$\acute{f}(x) = 4x - 2\,(x+1)$ $\therefore (1, -2)$ نهاية صغرى محلية

اشارة $\acute{f}(x)$: تناقص ↘ $- - - - - -$ ($x < 1$) | 1 | تزايد ↗ $+ + + + + +$ ($x > 1$)

ن ص

س : اذا كان المستقيم $y + 9x = 28$ مماسا للدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ عندالنقطة $(3, 1)$ جد قيمة b, a . وزاري ٢٠٠٩ / د٢

الحل : $\because (3, 1)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

$1 = a\,(3)^3 + b\,(3)^2 + 1$

$1 = 27\,a + 9b + 1 \Rightarrow 0 = 27\,a + 9\,b\,] \div 9$

$3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow \acute{f}(3) = 3a(9) + 2b(3) = 27 + 6b$ ميل المماس

ميل المماس $= \frac{- \text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-9}{1} = -9$

$[27\,a + 6b = -9\,] \div 3$

$6a + 2b = 0 \ \ldots\ldots\ldots (1)$

$\mp 9a \mp 2b = \pm 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ بالطرح

$-3a = 3 \Rightarrow a = -1$ نعوض في المعادلة (١)

$\therefore 3\,(-1) + b = 0 \Rightarrow -3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$

س : اذا علمت ان لمنحني الدالة $f\,(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ نقطة نهاية صغرى محلية هي $(3\,,10)$ فجد قيمة $a\,,b \in R$.

الحل : النقطة $(3\,,10)$ تحقق معادلة المنحني والمشتقة عندها تساوي صفر

$$f\,(x) = ax + \frac{b}{x-1} \Rightarrow 10 = 3a + \frac{b}{3-1} \Rightarrow 10 = 3a + \frac{b}{2} \overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} 20 = 6a + b \ldots.(1)$$

$$f\,(x) = ax + b\,(x-1)^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = a - b(x-1)^{-2} \Rightarrow \acute{f}(x) = a - \frac{b}{(x-1)^2}$$

$$a - \frac{b}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{(3-1)^2} = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{4} = 0 \overset{(\times 4)}{\Longrightarrow} 4a - b = 0 \ldots.(2)$$

$6a + b = 20 \ldots.(1)$

$\underline{4a - b = 0 \quad \ldots.(2)}$

$10a = 20 \Rightarrow a = 2$

$4(2) - b = 0 \Rightarrow b = 8$

رسم المخطط البياني للدالة

لرسم المخطط البياني لأي دالة معطاة نتبع الخطوات التالية والتي تمثل النقط الاساسية للرسم :

١) اوسع مجال للدالة　　٢) نقط التقاطع مع المحورين　　٣) التناظر　　٤) المحاذيات

٥) دراسة $\acute{f}(x)$ وما ينتج عنها　　٦) دراسة $\acute{\acute{f}}(x)$ وما ينتج عنها　　٧) تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

١) أوسع مجال للدالة :

❖ كثيرات الحدود : اوسع مجال لها $= R$.

❖ الدوال الكسرية : القيم التي تجعل المقام = صفر $R\,/$

❖ الدوال الجذرية : القيمة التي داخل الجذر ≥ 0

٢) نقط التقاطع مع المحورين : وهي على نوعين :

❖ التقاطع مع المحور الصادي : لإيجاد نقط التقاطع مع المحور (y) نجعل $(x = 0)$ لإيجاد قيم y .

❖ التقاطع مع المحور السيني : لإيجاد نقط التقاطع مع المحور (x) نجعل $(y = 0)$ لإيجاد قيم x .

مثال توضيحي : جد نقاط التقاطع

$a)\ f(x) = x^3 - 4x$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$

∴ نقط التقاطع $(2\,,0), (-2\,,0), (0\,,0)$

٣) التناظر : وهو على نوعين

a) يكون المنحني متناظر مع المحور الصادي اذا كانت اسس المتغير (x) كلها زوجية اي ان $f(-x) = f\,(x)$

b) يكون المنحني متناظر حول نقطة الاصل اذا كانت اسس المتغير (x) كلها فردية اي ان $f(-x) = -f\,(x)$

مثال توضيحي :

$$1)\ f(x) = x^4 - x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} \Rightarrow x^4 - x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

$$2)\ f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -[x^3 - 2x]$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

٤) المحاذيات : دراستنا للمحاذيات تقتصر على الدوال الكسرية فقط

❖ المحاذي الافقي الموازي لمحور السينات : تكون معادلته $\boxed{y = \text{عدد}}$ هذا العدد هو حاصل قسمة معامل الحد الاكبر درجة من البسط على معامل الحد الاكبر درجة من المقام بشرط تساوي الدرجتين .

❖ المحاذي الشاقولي الموازي لمحور الصادات : نجعل الدالة بدلالة المتغير x اي نجعل $y = \frac{g(x)}{h\,(x)}$ ثم نجعل $h(x) = 0$ ونجد قيم (x) فهي تمثل معادلة المستقيم الشاقولي .

$$(1)\ f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ المحاذي الشاقولي

$y = \frac{3x-4}{x+2} \Rightarrow y = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3$ المحاذي الافقي

$$(2)\ f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$$

المحاذي الشاقولي : $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

المحاذي الافقي : $y = \frac{0x^2+x+3}{x^2-4}$ تساوي الدرجتين $\Rightarrow y = \frac{\text{معامل } x^2 \text{ للبسط}}{\text{معامل } x^2 \text{ للمقام}} = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$

$(3)\ f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x-5}$

المحاذي الشاقولي : $x-5=0 \Rightarrow x=5$

المحاذي الافقي : غير معرف $y = \dfrac{1}{0} \Rightarrow y = \dfrac{\text{معامل } x^2 \text{ للبسط}}{\text{معامل } x^2 \text{ للمقام}} \Rightarrow$ نساوي الدرجتين $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x-5} = \dfrac{x^2+3x+3}{0x^2+x-5}$

مثال : أرسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحنى الدالة $f(x) = (x^2-1)^2$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $R =$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

١) المحور السيني : $y = 0 \Rightarrow (x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1$

∴ نقاط التقاطع $(1,0)$, $(-1,0)$

٢) المحور الصادي : $x = 0$

∴ $(0,1)$ نقاط التقاطع $\quad y = ((0)^2-1)^2 = (-1)^2 = 1$

3) التناظر : الدالة متناظرة مع المحور الصادي لأنه $f(-x) = f(x)$

4) المحاذيات : لا يوجد محاذيات

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{y} = 2(x^2-1).2x = 4x^3-4x$

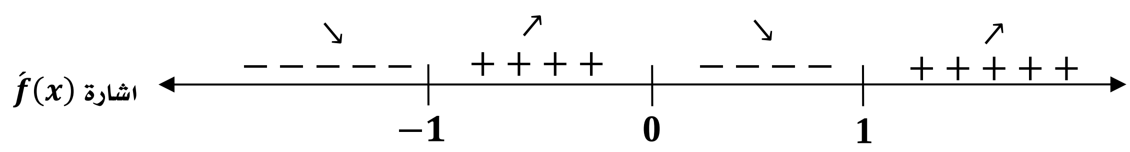
$\acute{y} = 0 \Rightarrow [4x^3-4x=0] \div 4$

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0$

$x = 0 \quad , x = \pm 1$ نقطة حرجة مرشحة

$x = \pm 1 \Rightarrow y = [(\pm1)^2-1]^2 = 0$ نقطة نهاية صغرى محلية $(-1,0)$, $(1,0)$

$x = 0 \Rightarrow y = [(0)^2-1]^2 = 1$ نقطة نهاية عظمى محلية $(0,1)$



مناطق التناقص $\{x : x < -1\}$, $(0,1)$

مناطق التزايد $\{x : x > 1\}$, $(-1,0)$

6) مناطق التحدب والتقعر

$$y'' = 12x^2 - 4$$

$$12x^2 - 4 = 0\ ]\ \div 4$$

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = [(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1]^2 \Rightarrow y = [\frac{1}{3} - 1]^2 = (\frac{-2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

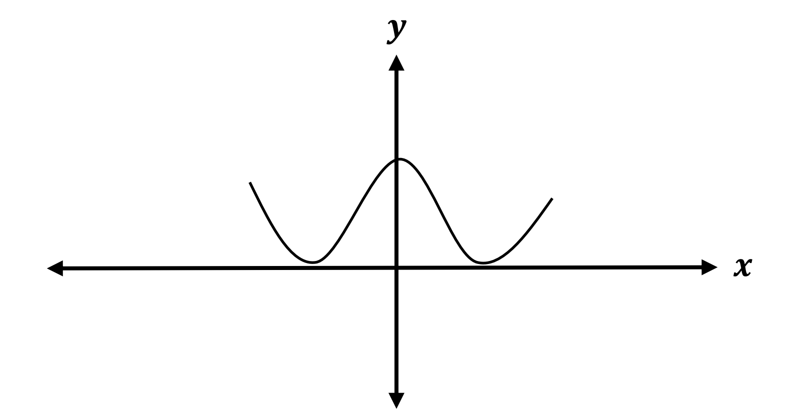
$\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$: $+ + + +$ ($\cup$) | $- - - -$ ($\cap$) | $+ + + +$ ($\cup$)

نقاط الانقلاب $\therefore \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)\ ,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$

مناطق التقعر $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ مناطق التحدب $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$


7) الرسم البياني

x	y	(x, y)
1	0	$(1, 0)$
-1	0	$(-1, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{9}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{9}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$



مثال : ارسم منحني الدالة باستخدام معلوماتك في التفاضل $f(x) = x^5$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع مع المحورين

- المحور السيني نجعل $y = 0$

النقطة $(0, 0)$ $\quad x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$

- المحور الصادي نجعل $x = 0$

النقطة $(0, 0)$ $\quad y = (0)^5 = 0$

3) التناظر

الدالة متناظرة مع نقطة الاصل لأن

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$$

4) المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{y} = 5x^4 \Rightarrow 5x^4 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

لا توجد نقاط نهايات والدالة متزايدة في $\{x : x > 0\}, \{x : x < 0\}$

$(0\,,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية

$+ + + + + + \nearrow \quad 0 \quad + + + + + + + \nearrow$

6) مناطق التحدب والتقعر

$\acute{\acute{y}} = 20x^3 \Rightarrow 20x^3 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

$y = (0)^5 = 0 \;,\; x = 0$ $\quad \therefore (0\,,0)$ نقطة انقلاب

$- - - - - \Cap \quad 0 \quad + + + + + + + \Cup$

الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$

الدالة مقعرة في $\{x : x > 0\}$

7) الرسم البياني

x	y	$(x\,,y)$
0	0	$(0,0)$
1	1	$(1\,,1)$
-1	-1	$(-1\,,-1)$
32	2	$(2\,,32)$

مثال : بالاستعانة بالتفاضل أرسم منحني الدالة $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $= R / \{-1\}$, $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

١- محور السينات $y = 0$ $\quad 0 = \frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\,,0\right)$

٢- محور الصادات $x = 0$ $\quad f(0) = \frac{3(0)-1}{0+1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0\,,-1)$

3) التناظر : $\because$ العدد (1) ينتمي الى مجال الدالة (-1) لا ينتمي الى مجال الدالة لذلك فالمنحني غير متناظر مع محور الصادات وغير متناظر مع نقطة الاصل . $\therefore$ لا يوجد تناظر

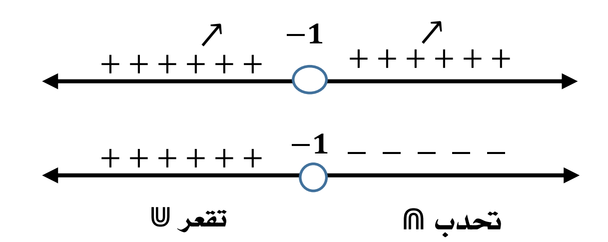
4) المحاذيات : المحاذي الشاقولي $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

المحاذي الافقي $y = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3$

$$5)\ \acute{f}(x) = \frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$4 = 0$ غير ممكن $\forall x \in R\ /\{-1\}\ ,\ \acute{f}(x) > 0$

الدالة متزايدة $\{x : x > -1\}$ ، $\{x : x < -1\}$ ولا توجد نقاط حرجة .



$\acute{f}(x) = 4\,(x+1)^{-2}$

$$6)\ \acute{\acute{f}}(x) = -8\,(x+1)^{-3} = \frac{-8}{(x+1)^3}$$

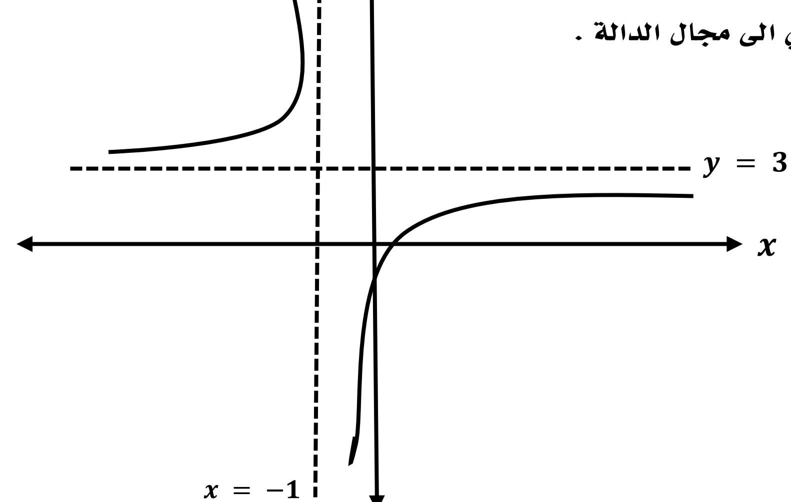
$\acute{\acute{f}}(x) = 0 \Rightarrow -8 = 0$ غير ممكن

الدالة مقعرة $\{x : x < -1\}$

الدالة محدبة $\{x : x > -1\}$

$\therefore$ الدالة لا تمتلك نقطة أنقلاب لأن (-1) لا ينتمي الى مجال الدالة .

7) الرسم البياني



x	y	$(x\,,y)$
0	-1	$(0,-1)$
$\frac{1}{3}$	0	$\left(\frac{1}{3}\,,0\right)$
2	$\frac{5}{3}$	$\left(2\,,\frac{5}{3}\right)$
-2	7	$(-2\,,7)$
1	1	$(1\,,1)$

مثال : باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) نقاط التقاطع مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow x = 0$ ، $(0\,,0)$ مع محور السينات

نقاط التقاطع مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ، $(0\,,0)$ مع محور الصادات

3) التناظر مع الصادي : $\forall x \in R , \exists -x \in R$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$f(-x) = f(x)$ متناظرة مع المحور الصادي لأنها زوجية

4) المحاذيات : المحاذي الافقي $= \frac{\text{معامل } x^2 \text{ للبسط}}{\text{معامل } x^2 \text{ للمقام}}$ $\quad y = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow y = 1$

لا يوجد محاذي عمودي $x^2 + 1 \neq 0$

5) مناطق التزايد والتناقص

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$0 = \frac{(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$- - - - -$ ↘ $\quad 0 \quad$ $+ + + + +$ ↗

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad$ $(0 , 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

تزايد $\{\forall x : x > 0\}$ $\quad$ تناقص $\{\forall x : x < 0\}$

$$6)\ \acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2+1)^2(2) - 2x\,(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$0 = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$ بضرب الطرفين في الوسطين

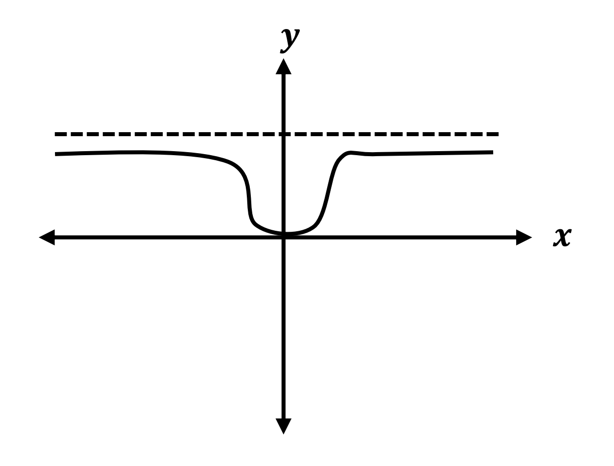
$$2 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$

7) الرسم البياني

x	y	$(x\,,y)$
0	0	$(0,0)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\left(-1\,,\frac{1}{2}\right)$
2	$\frac{4}{5}$	$\left(2\,,\frac{4}{5}\right)$
-2	$\frac{4}{5}$	$\left(-2\,,\frac{4}{5}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	$\left(1\,,\frac{1}{2}\right)$



$\Cap$ — — — — — — $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Cup$ + + + + + + + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Cap$ — — — — — — — —

محدبة في $\left\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\,,\left\{x: x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

مقعرة في الفترة المفتوحة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

نقطتا الانقلاب $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$

مثال : ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل الدالة : $f\,(x)=x^3-3x^2+4$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $=\mathrm{R}$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

$x=0\ \Rightarrow y=4$

$y=0\ \Rightarrow x^3-3x^2+4=0$ لا يمكن حل المعادلة

∴ النقطة $(0\,,4)$ نقطة التقاطع مع المحور الصادي

3) التناظر :

$\forall\, x\in R\ \exists\,(-x)\in R\Rightarrow f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2+4=-x^3-3x^2+4$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل لأن :

$f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية (اي كسرية)

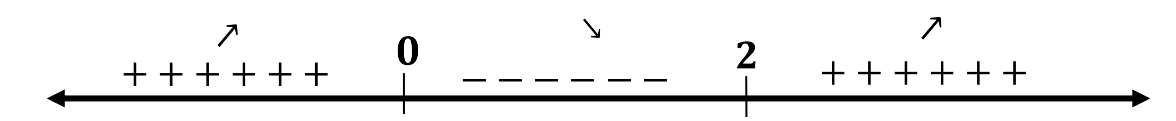
5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x \qquad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$

$f(0) = 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4)$

$f(2) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (2,0)$



f متزايدة في كل من $\{x: x < 0\}, \{x: x > 2\}$

f متناقصة في الفترة $(0,2)$

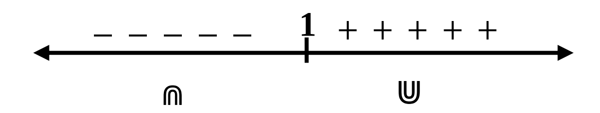
∴ $(0,4)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(2,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

6) مناطق التقعر والتحدب

$\acute{\acute{f}}(x) = 6x - 6 \qquad \left(\acute{\acute{f}}(x) = 0\right.$ نجعل$\left.\right)$

$6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1,2)$



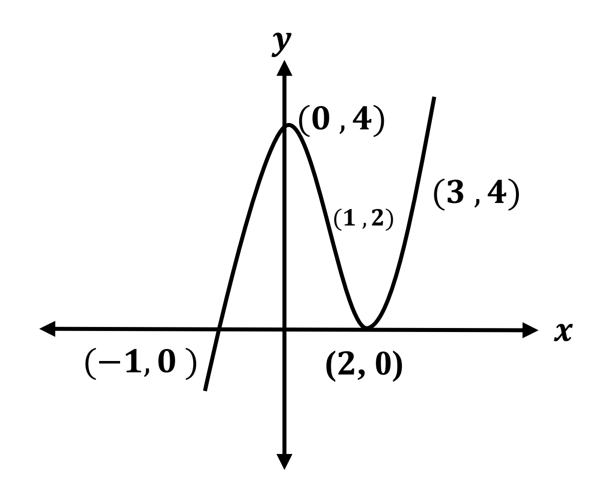
f مقعرة في $\{x: x > 1\}$

f محدبة في $\{x: x < 1\}$

∴ $(1,2)$ نقطة انقلاب

7) الرسم البياني

x	y	(x,y)
0	4	$(0,4)$
1	2	$(1,2)$
2	0	$(2,0)$
3	4	$(3,4)$
−1	0	$(-1,0)$



حل تمارين (3 – 5)

أرسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

1) $f(x) = 10 - 3x - x^2$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $R =$.

2) التقاطع مع المحورين

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 10 - 0 - 0 = 10$ فان $(0, 10)$

$y = 0 \Rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -5 \quad , \quad x = 2$

$\therefore$ نقط التقاطع $(0, 10)$, $(-5, 0)$, $(2, 0)$

3) التناظر : لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل .

$f(-x) = 10 + 3x - x^2$

$f(x) = 10 - 3x - x^2$

$f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة غير نسبية .

5) مناطق التزايد والتناقص

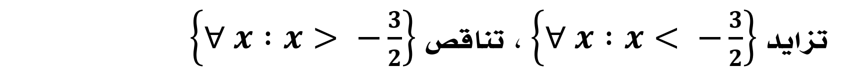
$f'(x) = -3 - 2x$

$-3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

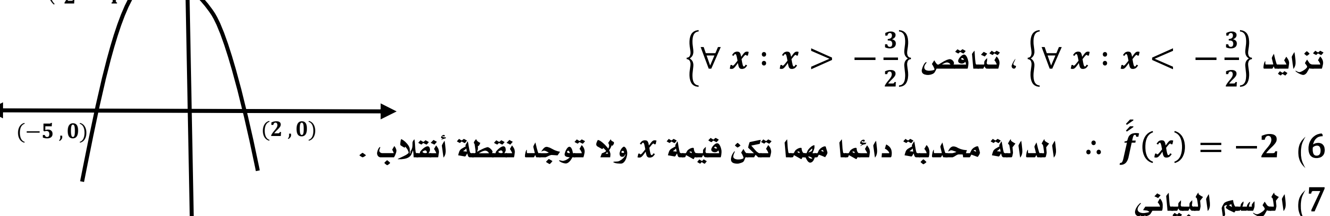
$+ + + + +$ ↗ $-\frac{3}{2}$ ↘ $- - - - - -$

$f\left(\frac{-3}{2}\right) = 10 - 3\left(\frac{-3}{2}\right) - \frac{9}{4} \Rightarrow 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40 + 18 - 9}{4} = \frac{49}{4}$

النقطة $\left(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية



تزايد $\left\{\forall x : x < -\frac{3}{2}\right\}$ ، تناقص $\left\{\forall x : x > -\frac{3}{2}\right\}$



6) $f''(x) = -2 \quad \therefore$ الدالة محدبة دائما مهما تكن قيمة x ولا توجد نقطة أنقلاب .

7) الرسم البياني

x	0	2	-5	$\frac{-3}{2}$	0
y	0	0	0	$\frac{49}{4}$	10
(x, y)	$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(-5, 0)$	$\left(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4}\right)$	$(0, 10)$

2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين : عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 + 3 = 3 \Rightarrow (0, 3)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + 4x + 3 \Leftarrow (x+3)((x+1) = 0$

فإن $(-1, 0), (-3, 0)$

3) التناظر : $f(-x) = x^2 + 4x + 3$ $\quad f(-x) \neq -f(x)$, $f(-x) \neq f(x)$

$\therefore$ لا يوجد تناظر مع محور السينات أو نقطة الاصل

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = 2x + 4$

$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

$$\underset{\searrow}{- - - - -} \quad -2 \quad \underset{\nearrow}{+ + + + +}$$

تزايد $\{\forall x : x > -2\}$ ، تناقص $\{\forall x : x < -2\}$

6) مناطق التقعر والتحدب

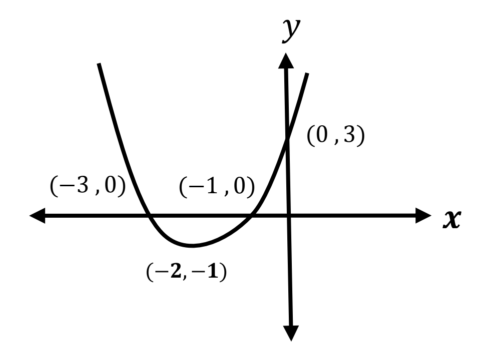
$\acute{\acute{f}}(x) = 2$ الدالة مقعرة ولا توجد نقطة أنقلاب

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 \Rightarrow 4 - 8 + 3 = -1$

$(-2, -1)$ نهاية صغرى محلية

7) الرسم البياني

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	-1	0	3	8
(x, y)	$(-3, 0)$	$(-2, -1)$	$(-, 0)$	$(0, 3)$	$(1, 8)$



3) $f(x) = (1-x)^3 + 1$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$.

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = (1-0)^3 + 1 = 2 \quad \therefore (0, 2)$

عندما $y = 0 \Rightarrow (1-x)^3 + 1 = 0 \Rightarrow (1-x)^3 = -1 \Rightarrow 1 - x = -1 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore (2, 0)$

3) التناظر $f(-x) = (1-(-x))^3 + 1 = (1+x)^3 + 1$

لا يوجد تناظر $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = 3(1-x)^2 . (-1) = -3(1-x)^2 \qquad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل)

$-3(1-x)^2 = 0 \xrightarrow{\div -3} (1-x)^2 = 0 \xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}} x = 1$

$f(x) = (1-x)^3 + 1 \Rightarrow f(1) = (1-1)^3 + 1 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1$ نقطة حرجة $(1, 1) \therefore$

$_ _ \searrow _ _ \quad 1 \quad _ _ \searrow _ _$

$f(x)$ متناقصة $\{\forall x : x > 1\}$ $\{\forall x : x < 1\}$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = -6(1-x).(-1) \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = 6(1-x) \qquad (\acute{\acute{f}}(x) = 0$ نجعل)

$6(1-x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad , \quad f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$

نقطة انقلاب مرشحة $(1, 1)$

$+ + + + + \quad 1 \quad - - - - -$

$\Cup \qquad \Cap$

مقعرة $\{\forall x : x < 1\}$ ، محدبة $\{\forall x : x < 1\}$

7) الرسم البياني

x	2	0	1	-1
y	0	2	1	9
(x, y)	$(2, 0)$	$(0, 2)$	$(1, 1)$	$(-1, 9)$

y ، x ، $(-1, 9)$ ، $(0, 2)$ ، $(1, 1)$ ، $(2, 0)$

4) $f(x) = 6x - x^3$ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$.

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 = 0 \qquad (0,0)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 6x - x^3 = 0 \Rightarrow x(6 - x^2) = 0$

أما $x = 0$

أو $6 - x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

نقط التقاطع $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, $(0,0)$

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$f'(x) = 6 - 3x^2$ نجعل $f'(x) = 0$

$6 - 3x^2 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$- - - \searrow - - \quad -\sqrt{2} \quad + + \nearrow + + + \quad \sqrt{2} \quad - - \searrow - - -$

$f(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3 \Rightarrow y = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ نقطة نهاية عظمى $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3 \Rightarrow -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$ نقطة نهاية صغرى $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

$f(x)$ متزايدة في $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، $f(x)$ متناقصة في $\{x: x < -\sqrt{2}\}$, $\{x: x > \sqrt{2}\}$

6) $f''(x) = -6x$ نجعل $f''(x) = 0$

$-6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \boxed{y = 0}$ $\therefore (0,0)$ نقطة انقلاب

$+ + + + + \quad 0 \quad - - - - - -$

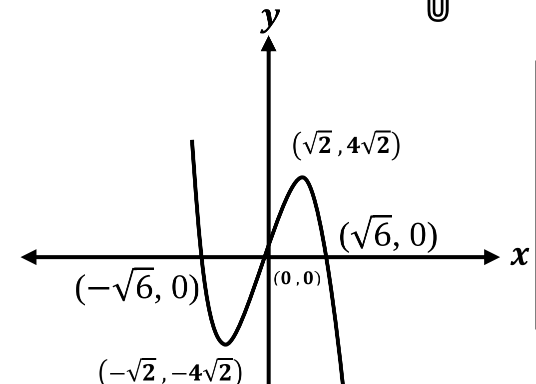
$\cup \qquad \cap$

$f(x)$ مقعرة في $\{x: x < 0\}$

$f(x)$ محدبة في $\{x: x > 0\}$

7) الرسم البياني

x	0	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
y	0	0	0	$-4\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
(x,y)	$(0,0)$	$(-\sqrt{6},0)$	$(\sqrt{6},0)$	$(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},4\sqrt{2})$



ملاحظة : التحدب بقدر التقعر في الرسم لأن التناظر حول نقطة الاصل .

5) $f(x) = \frac{1}{x}$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R - \{0\}$

2) التقاطع مع المحورين

$0 \neq x$ لأن $1 \neq 0$ لا توجد نقاط تقاطع مع محور الصادات

$0 \neq y$ لأن $1 \neq 0$ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

2) التناظر $f(-x) = -\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $f(-x) = -f(x)$ التناظر مع نقطة الاصل .

4) المحاذيات : المستقيم المحاذي الشاقولي $x = 0$

المستقيم المحاذي الافقي $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$

٥) مناطق التزايد والتناقص

$f(x) = x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$0 = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow -1 = 0$ غير ممكن

$- - - - - \searrow$ 0 $- - - - - \searrow$

❖ توجد فجوة ولا توجد نقاط حرجة

الدالة متناقصة بالفترتين $\{x : x \in R , x < 0\}$, $\{x : x \in R , x > 0\}$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = 2x^{-3}$ (نجعل $\acute{\acute{f}}(x) = 0$)

$0 = \frac{2}{x^3} \Rightarrow 0 = 2$ غير ممكن

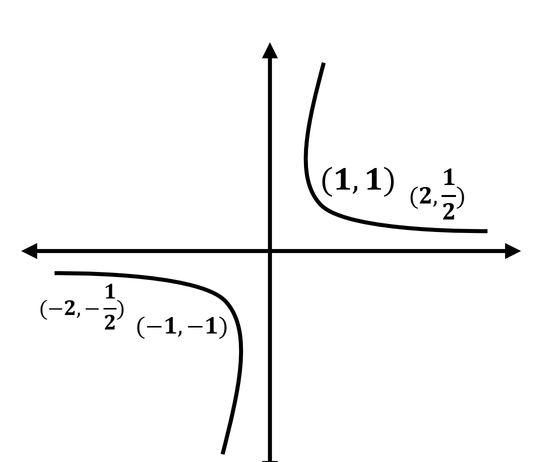
$- - - - -$ 0 $+ + + + +$

$\cap$ $\cup$

ولا توجد نقاط انقلاب

محدبة $\{\forall x : x < 0\}$, مقعرة $\{\forall x : x > 0\}$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	فجوة	1	$\frac{1}{2}$
(x, y)	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-1, -1)$	(x, y)	$(1, 1)$	$(2, \frac{1}{2})$



6) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R - \{-1\}$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0-1}{0+1} \Rightarrow y = -1 , \ (0,-1)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 , \ (1,0)$

2) التناظر : لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل لأن :

$$f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \ , \qquad f(-x) \neq f(x)$$

4) المحاذيات :

المحاذي الشاقولي $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

المحاذي الافقي $y = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1$

5) مناطق التزايد والتناقص

$$\acute{f}(x) = \frac{(x+1).(1) - (x-1).(1)}{(x+1)^2}$$

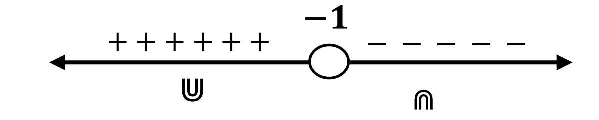
لا توجد نقاط حرجة $0 = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \Rightarrow 0 \neq \frac{2}{(x+1)^2}$

تزايد $\{\forall x : -1 < x < -1\}$

$$\underset{+++++++}{\nearrow} \quad -1 \quad \underset{+++++++}{\nearrow}$$

6) $\acute{f}(x) = 2(x+1)^{-2} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = -4(x+1)^{-3}$

غير ممكن $0 \neq \frac{-4}{(x+1)^3}$

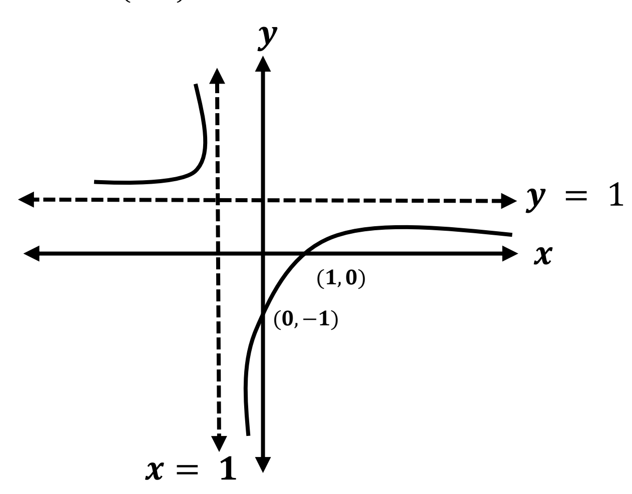


f محدبة في $\{x : x > -1\}$

f مقعرة في $\{x : x < -1\}$

7) الرسم البياني

x	0	1	2	−2
y	−1	0	$\frac{1}{3}$	3
(x,y)	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(2,\frac{1}{3})$	$(-2,3)$



7) $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $R =$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = (0+2)(0-1)^2 = 2.1 \Rightarrow y = 2 \quad (0,2)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 0 = (x+2)(x-1)^2$

$either\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$or \quad (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad (1,0)\ ,(-2,0)$

3) التناظر : $f(-x) = (-x+2)(-x-1)^2$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = (x+2).2(x-1) + (x-1)^2.1 \qquad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$(x+2)(2x-2) + (x^2-2x+1) = 0$

$2x^2 + 2x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2-1) = 0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$+ + + + + \ \ -1 \ \ - - - - - \ \ 1 \ \ + + + + + +$

نقطة حرجة وتمثل نهاية صغرى $(1,0)$ ، نقطة حرجة وتمثل نهاية عظمى $(-1,4)$

$f(1) = (1+2)(1-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$f(-1) = (-1+2)(-1-1)^2 = 4 \Rightarrow y = 4$

$f(x)$ متزايدة $\{x : x > 1\}, \{x : x < -1\}$

$f(x)$ متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

6) $\acute{f}(x) = 3(x^2-1)$

$\acute{\acute{f}}(x) = 3(2x) \qquad (\acute{\acute{f}}(x) = 0$ نجعل$)$

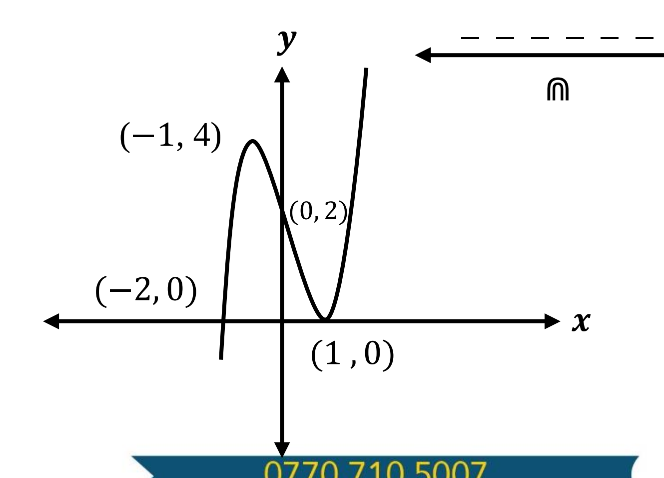
$6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = (0+2)(0-1)^2 \quad \therefore \ y = 2 \qquad$ نقطة أنقلاب $(0,2)$

$- - - - - - - \ \ 0 \ \ + + + + + +$
$\cap \qquad \cup$

$f(x)$ محدبة في $\{x : x < 0\}$

$f(x)$ مقعرة في $\{x : x > 0\}$



7) الرسم البياني

x	0	1	-2	-1
y	2	0	0	4
(x,y)	$(0,2)$	$(1,0)$	$(-2,0)$	$(-1,4)$

8) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$ لأن R $x^2+1=0 \Rightarrow x^2 = -1 \notin R$

2) التقاطع مع المحورين : $0 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$x^2 - 1 = 0 \quad , \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \ , \ (-1,0),(1,0)$

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \ , \ (0,-1)$

3) التناظر : $f(-x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$ التناظر حول محور الصادات لأن $f(-x) = f(x)$

4) المحاذيات :

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2 = -1$ لا يوجد مستقيم محاذي شاقولي

$y = \frac{1}{1} = 1$ المحاذي الافقي

5) مناطق التزايد والتناقص

$$f'(x) = \frac{(x^2+1).2x - (x^2-1).2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$, نجعل $f'(x) = 0$

$\frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$ $(0,-1)$ نقطة نهاية صغرى

$$- - - - - - - \ 0 \ + + + + + +$$

$f(x)$ متزايدة في $\{x : x > 0\}$

$f(x)$ متناقصة في $\{x : x < 0\}$

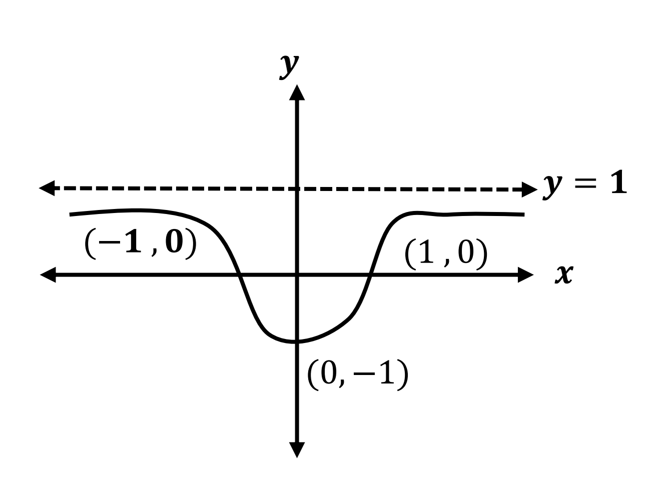
6) $$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2.4 - 4x.2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 16x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)[4(x^2+1) - 16x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{4x^2+4 - 16x^2}{(x^2+1)^3}$$ (نجعل $f''(x) = 0$)

$$\frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3} = 0$$



$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$x = +\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right)$

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right)$ نقطة الانقلاب المرشحة

$f(x)$ محدبة في $\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$, $\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$f(x)$ مقعرة في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$- - - - - \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad + + + + \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad - - - - -$

$\cap \qquad \cup \qquad \cap$

7) الرسم البياني

x	-1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
y	0	0	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
(x, y)	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	$(0, -1)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2})$	$(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2})$

9) $f(x) = 2x^2 - x^4$

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = (0 - 0) = 0 \ , \ (0, 0)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^4 = 0$

$2x^2 = x^4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = \mp\sqrt{2} \ , \ (\mp\sqrt{2}, 0)$

3) التناظر $f(-x) = 2x^2 - x^4 = f(x)$ التناظر مع محور الصادات لأن : $f(-x) = -f(x)$

4) المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = 4x - 4x^3 \qquad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$4x - 4x^3 = 0 \overset{\div 4}{\Rightarrow} x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

$either \ x = 0$

$or \quad (1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
$f(1) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$
$f(0) = 0 - 0 = 1 \Rightarrow y = 0$

$(1\,,1)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$(-1,1)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$(0\,,0)$ نقطة نهاية صغرى

$f(x)$ متزايدة في $\{x : x < -1\}$, $(0\,,1)$

$f(x)$ متزايدة في $\{x : x > 1\}$, $(-1\,,0)$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = 4 - 12x^2 \qquad (\acute{\acute{f}}(x) = 0$ نجعل$)$

$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow -12x^2 = -4$

$x^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$+ + + + \nearrow \quad -1 \quad - - \searrow - - \quad 0 \quad + + \nearrow + + \quad 1 \quad - \searrow - - -$

$- - - - \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad + + + + \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad - - - -$

$\cap \qquad \cup \qquad \cap$

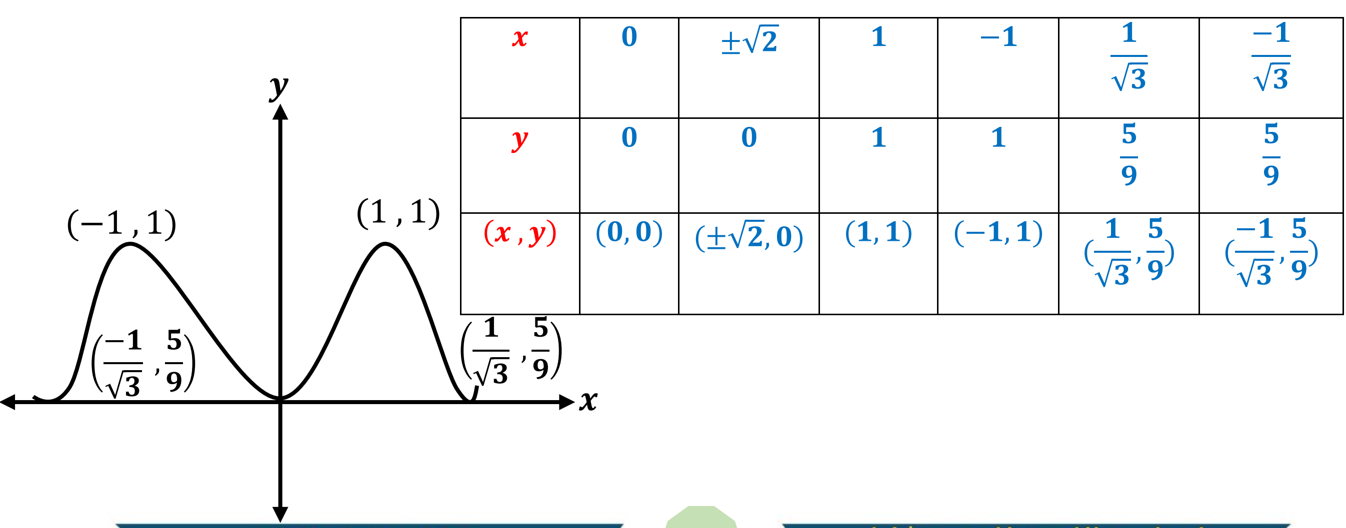
$\acute{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \quad , \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$

$\acute{f}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 2(\frac{-1}{\sqrt{3}})^2 - (\frac{-1}{\sqrt{3}})^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \quad , \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$

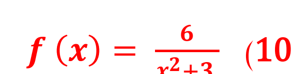
النقط $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ نقط انقلاب مرشحة

$f(x)$ مقعرة في $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(x)$ محدبة في $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\left\{x : x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$



x	0	$\pm\sqrt{2}$	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
y	0	0	1	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$
$(x\,,y)$	$(0,0)$	$(\pm\sqrt{2},0)$	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9})$	$(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9})$



10) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $= R$ لأن $x^2 + 3 \neq 0$

3) نقاط التقاطع مع المحورين

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{6}{0+3} = 2 \quad , \quad (0\,,2)$

$\frac{6}{x^2+3} = 0 \Rightarrow 0 \neq 6$

2) التناظر : $f(-x) = \frac{6}{x^2+3} = f(x)$ التناظر مع محور الصادات لأن $f(-x) = f(x)$

4) المحاذيات :

$x^2 + 3 \neq 0$ لا يوجد محاذي شاقولي

$y = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$ المحاذي الافقي

5) مناطق التزايد والتناقص

$f'(x) = \frac{(x^2+3)\,0-(6)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$ (نجعل $f'(x) = 0$)

$\frac{-12x}{(x^2+3)^2} = 0 \Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow y = 2$

النقطة $(0\,,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

اشارة $f'(x)$: $+\,+\,+\,+$ ↗ 0 ↘ $-\,-\,-\,-$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R\,, x < 0\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R\,, x > 0\}$

6) $f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12)-[-(12x)2(x^2+3)(2x)]}{(x^2+3)^4}$

$f''(x) = \frac{-12(x^2+3)^2+48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3)+48x^2]}{(x^2+3)^4}$

$f''(x) = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3} = 0$ (نجعل $f''(x) = 0$)

$36x^2 - 36 = 0 \overset{\div 36}{\Longrightarrow} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = y = \frac{6}{(1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = y = \frac{6}{(-1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

++++	-1	− − − −	1	++++	اشارة $f''(x)$
⋒		⋓		⋒	

∴ النقاط $\left(1\,,\frac{3}{2}\right)$ ، $\left(-1\,,\frac{3}{2}\right)$ نقاط انقلاب

$f(x)$ مقعرة في $\{x: x > 1\}$ ، $\{x: x < -1\}$

$f(x)$ محدبة في $(-1\,,1)$

7) الرسم البياني

x	-1	1	0
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$(x\,,y)$	$\left(-1\,,\frac{3}{2}\right)$	$\left(1\,,\frac{3}{2}\right)$	$(0\,,2)$

تطبيقات عملية على القيم العظمى والصغرى

ظهرت في الفيزياء الكثير من المسائل التي أدت الى تطور حساب التفاضل والتكامل ومن هذه المسائل مسائل حساب أقصى أرتفاع تصله قذيفة أطلقت بزوايا مختلفة أو اقصى ارتفاع يصله جسم مقذوف شاقوليا الى الاعلى أو أقل كلفة أو أقل زمن ومسائل من الصناعات مثل أقل مساحة وأكبر حجم وأقل محيط ، ... الخ .

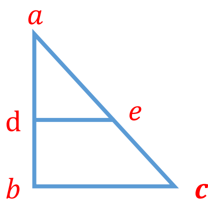
لحل المسائل المتعلقة بهذا الموضوع نتبع ما ياتي :

١- نرسم شكلا توضيحيا للسؤال اذا كان السؤال يحوي شكلا هندسيا .

٢- نعمل فرضية السؤال التي تعتمد على كلمة (جد ، ما هي ، عين ، احسب ، ...) اي تكون الفرضية على اساس المطلوب

٣- تكون علاقة رئيسية للدالة (اكبر ما يمكن ، ابعد ما يمكن ، اصغر ما يمكن ، أطول مسافة ، أقل كمية ، ...) ثم نبدأ بتكوين الدالة على اساس هذه الكلمات وفي أكثر الاحيان تكون هذه الدالة (قانون حجم ، مساحة ، محيط ، فيثاغورس ، تشابه مثلثات ، دوال دائرية ، ...) أما اذا وجد اكبر تغير فيجب ان نجد علاقة اخرى : لحل السؤال (نجد علاقة مساعدة) (من السؤال او الرسم) .

٤- نشتق الدالة المشتقة الاولى ونساوي المشتقة الاولى الى الصفر ونجد القيم ونميزها على خط الاعداد . بعض القيم تهمل اذا لم تنطبق مع السؤال او المطلوب من خلال الاشارة مثلا ، وفي بعض الاسئلة مثلا يعطى المثلث فاذا كان المثلث خالي من مستقيم يوازي احد الاضلاع نستخدم نظرية فيثاغورس . اما اذا كان المثلث يحوي مستقيم يوازي احد الإضلاع نستخدم التناسب $\frac{ad}{ab} = \frac{ae}{ac}$



مثال : جد عددين مجموعهما 8 وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

الحل :

نفرض العدد الاول $= x$

نفرض العدد الثاني $= y$

حاصل ضربهما $= m$

$$x + y = 8$$
$$y = 8 - x$$
$$m = xy$$
$$m = x(8 - x)$$
$$m = 8x - x^2$$ نشتق

$$m' = 8 - 2x \qquad (m' = 0)$$
$$8 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 8$$

العدد الأول $x = 4$

العدد الثاني $y = 8 - 4 = 4$

مثال : جد بعدي أكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته $(24\ cm)$ وإرتفاعه $(18\ cm)$ بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقين تقعان على ساقيه . وزاري ٢٠١٣/د٢

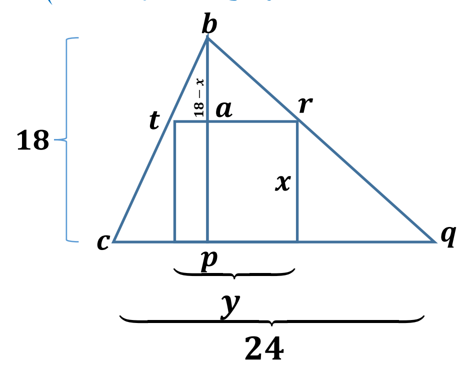
الحل :

نفرض بعدي المستطيل : x , y

مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه

$$A = x\,y$$

العلاقة : تشابه المثلثان btr , bcq (لتساوي زواياهما المتناظرة لذا تتناسب اضلاعهما المتناظرة وكذلك ارتفاعهما)



$$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bq} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{18 - x}{18}$$

$$y = 24\left(\frac{18 - x}{18}\right) \Rightarrow y = \frac{4}{3}(18 - x)$$

$$\therefore A = xy = x\left(\frac{4}{3}(18 - x)\right) = \frac{4}{3}(18x - x^2)$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{4}{3}(18 - 2x) \qquad \left(\frac{dA}{dx} = 0 \text{ نجعل}\right)$$

$$\left[\frac{4}{3}(18 - 2x) = 0\right] \div \frac{3}{4}$$

$$18 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

$y = \frac{4}{3}(18 - 9) = 12$

∴ بعدي المستطيل هما $9 , 12$

مثال : صنع صندوق مفتوح من قطعة النحاس مربعة الشكل طول ضلعها $12\ cm$ وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الابعاد من اركانها الاربعة ثم ثني الاجزاء البارزة منها ، ما هو الحجم الاعظم لهذه العلبة ؟

الحل : وزاري ٢٠١٥ / د١

الفرضية : نفرض طول الضلع المربع المقطوع $= x$

ابعاد الصندوق $= (12 - 2x , 12 - 2x , x)$

الحجم = حاصل ضرب الابعاد الثلاثة

$v = (12 - 2x)(12 - 2x)x$

$v = x(144 - 48x + 4x^2)$

$v = 144x - 48x^2 + 4x^3$

العلاقة : لا نحتاج الى علاقة لأن المعادلة تحتوي على متغير واحد

نجعل $\left(\frac{dv}{dx} = 0\right)$ $\quad \frac{dv}{dx} = 144 - 96x + 12x^2$

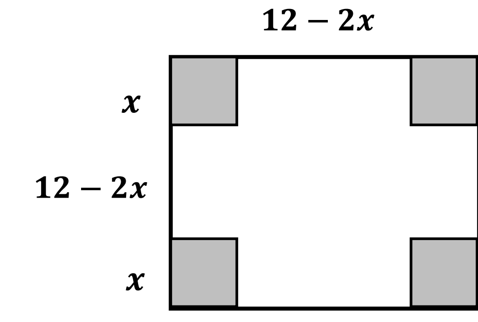
$[144 - 96x + 12x^2 = 0] \div 12$

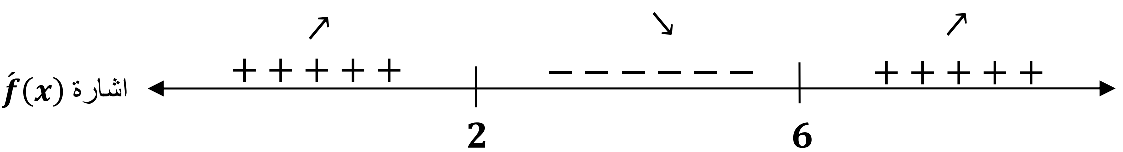
$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0$

$either \quad x = 6$ لا يمكن

$or \quad \boxed{x = 2}$

$v = 2(12 - 4)^2 = 128\ cm^2$





س : مخروط دائري قائم مولده $9\sqrt{3}\ cm$ جد ارتفاعه لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن . وزاري ٢٠٠٠ / د١

الحل :

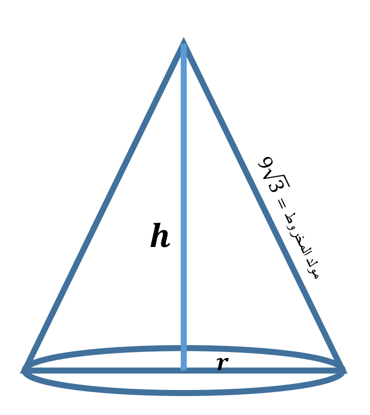
الدالة $\quad v = \frac{\pi}{3}r^2h$

العلاقة $\quad r^2 + h^2 = (9\sqrt{3})^2$

نعوض في الدالة $\quad r^2 = 243 - h^2$

$v = \frac{\pi}{3}(243 - h^2)h$

$v = \frac{\pi}{3}(243h - h^3)$

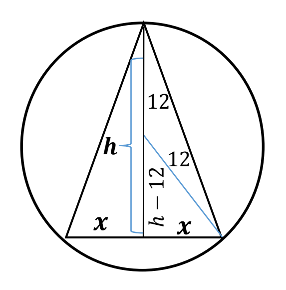


$v' = \frac{\pi}{3}(243 - 3h^2)$ ($v' = 0$ نجعل)

$[\frac{\pi}{3}(243 - 3h^2) = 0] \div \frac{\pi}{3}$

$[243 - 3h^2 = 0] \div 3 \Rightarrow 81 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 81 \Rightarrow h = 9\ cm$ ارتفاع المخروط هو

مثال : جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها $12cm$ ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$



الحل :

نفرض ارتفاع المثلث $= h$

نفرض طول قاعدة المثلث $= 2x$

الدالة : مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$A = \frac{1}{2}\,2xh$

$A = xh \ldots\ldots(1)$

العلاقة : المثلث القائم الزاوية $r^2 = (h - 12)^2 + x^2$

$(12)^2 = (h^2 - 24h + 144) + x^2$

$144 = h^2 - 24h + 144 + x^2$

$h^2 - 24h + x^2 = 0$

$x^2 = 24h - h^2$

$x = \sqrt{24h - h^2} \quad \ldots\ldots(2)$

نعوض (2) في (1)

$A = h\sqrt{24h - h^2}$

$A = \sqrt{24h^3 - h^4}$

$\frac{dA}{dh} = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$ ($\frac{dA}{dh} = 0$ نجعل)

$[72h^2 - 4h^3 = 0] \div 4$

$18h^2 - h^3 = 0$

$h^2(18 - h) = 0$

$either\ h = 0$ يهمل

$or\quad 18 - h = 0 \Rightarrow h = 18$ نعوض في (٢)

$x = \sqrt{24h - h^3}$

$x = \sqrt{24(18) - (18)^2} = \sqrt{(18)\ (6)}$

$x = 6\sqrt{3}\ cm$

$2x = 2\ (6\sqrt{3}\,) = 12\ \sqrt{3}\ cm$ طول القاعدة

$A = x\ h\ = 6\sqrt{3}\ (18) = 108\sqrt{3}\ cm$ مساحة المثلث

$A = \pi\ r^2$ مساحة الدائرة

$A = \pi(12)^2 = 144\ \pi$

$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

مثال : مجموع محيطي دائرة ومربع $(60\ cm)$ أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فأن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

الحل :

الفرضية : نفرض طول ضلع المربع $= x$ نفرض نصف قطر الدائرة $= r$

الدالة : المساحة = مساحة المربع + مساحة الدائرة

$A = x^2 + \pi r^2$

العلاقة : محيط المربع + محيط الدائرة $= 60\ cm$

$[60\ =\ 4x\ + 2\pi r\ ]\ \div 2$

$\pi r = 30 - 2x$

$r = \frac{30 - 2x}{\pi}$

$\therefore A =\ x^2 + \pi r^2 =\ x^2 + \pi \left(\frac{30 - 2x}{\pi}\right)^2$

$\therefore A =\ x^2 + \frac{1}{\pi}(30 - 2x)^2 =\ x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$

$\frac{dA}{dx} = 2x + \frac{1}{\pi}\ (-120 + 8x)$ $\left(\text{نجعل } \frac{dA}{dx} = 0\right)$

$2x + \frac{1}{\pi}\ (-120 + 8x) = 0\ \ ]\ \div\ \frac{\pi}{2}$

$x\,\pi - 60 + 4x = 0\ \Rightarrow x(\pi + 4) = 60\ \Rightarrow x = \frac{60}{\pi+4}$ طول ضلع المربع

قطر الدائرة $= 2r = 2\left[\frac{1}{\pi}(30 - 2x)\right] = \frac{2}{\pi}\left(30 - 2\,\frac{60}{\pi+4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(30 - \frac{120}{\pi+4}\right)$

قطر الدائرة $= \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi+120-120}{\pi+4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi}{\pi+4}\right) = \left(\frac{60}{\pi+4}\right) = x$

مثال : جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0 , 4)$.

الحل : وزاري ٢٠١١ /د٢ وزاري ٢٠١٣ / د١

نفرض ان النقطة $p\ (x , y)$ هي من نقط المنحني $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0 , 4)$

الدالة $S = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$

العلاقة $y^2 - x^2 = 3$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$$

العلاقة من السؤال $x^2 = y^2 - 3 \ldots\ldots(*)$

$$S = \sqrt{(y^2 - 3) + y^2 - 8y + 16}$$

$$S = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$\frac{dS}{dy} = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dS}{dy} = 0\right)$$

$$\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0$$

نعوض في $(*)$ $4y - 8 = 0 \Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow y = 2$

$$x^2 = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ النقاط $(1 , 2) , (-1 , 2)$

ملاحظات :

١- يمكن القول عن دالة المساحة في بعض الاحيان أكبر أو أصغر مسطح للشكل .

٢- يمكن القول ان دالة الحجم أو السعة في بعض الاحيان أكبر أو أصغر مجسم للشكل .

حل تمارين (3 – 6)

س1/ جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الثاني اكبر ما يمكن .

الحل :

الفرضية : نفرض العدد الاول $x =$

نفرض العدد الثاني $y =$

حاصل ضرب العدد الأول × مربع العدد الثاني $L =$

$$L = x.y^2 \ \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x + y = 75$$

$$x = 75 - y \ \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$L = (75 - y).y^2$$

$L = 75y^2 - y^3$

$\acute{L} = 150y - 3y^2$ ($\acute{L} = 0$ نجعل)

$[150y - 3y^2 = 0]$ $(\div 3)$

$50y - y^2 = 0 \Rightarrow y(50 - y) = 0$

$either\ y = 0$ يهمل

$or\ 50 - y = 0 \Rightarrow y = 50$ العدد الثاني نعوض في معادلة (٢)

$x = 75 - 50 = 25$ العدد الأول

س2/ جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}\ cm$. وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

الفرضية : نفرض الارتفاع $= 2h$ نفرض نصف قطر الاسطوانة $= r$ نفرض الحجم $= V$

الدالـــة : قانون حجم الاسطوانة (هي التي نقوم باشتقاقها)

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = r^2\pi.2h\ \ldots\ldots(1)$

العـــلاقة : نظرية فيثاغورس على المثلث القائم ABC

$h^2 + r^2 = (4\sqrt{3})^2$
$h^2 + r^2 = 48$

$r^2 = 48 - h^2\ \ldots\ldots(2)$

نعوض معادلة (٢) في (١)

$V = 2\pi(48 - h^2)h$

$V = 2\pi(48L - h^3)$

$\acute{V} = 2\pi(48 - 3h^2)$ ($\acute{V} = 0$ نجعل)

$2\pi[48 - 3h^2 = 0](\div 2\pi)$

$[48 - 3h^2 = 0] \div 3 \Rightarrow 16 - h^2 = 0$

$either\ h = -4$ يهمل

$or\ h = 4$ نعوض في (٢)

$r^2 = 48 - h^2 = 48 - 16 \Rightarrow r^2 = 32 \Rightarrow r = 4\sqrt{2}$ الارتفاع للاسطوانة

$2h = 2(4) = 8\ cm$

س3 / جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة قطرها $4\sqrt{2}cm$. وزاري ٢٠١٢ / د١

الحل :

الفرضية : نفرض طول المستطيل $= 2x$ نفرض عرض المستطيل $= y$ نفرض مساحة المستطيل $= A$

الدالة : قانون مساحة المستطيل (هي التي نقوم باشتقاقها)

العلاقة : نظرية فيثاغورس على المثلث القائم ABC

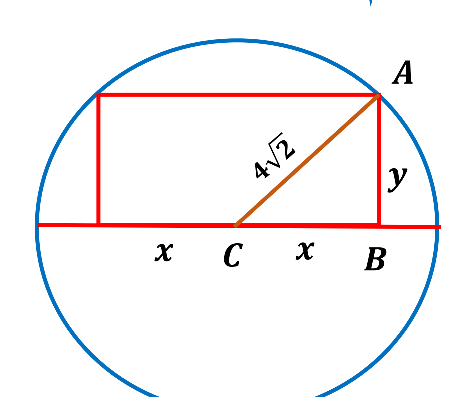
$A = 2x \,.\, y \quad \dots\dots(1)$

$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

$x^2 + y^2 = 32$

$y^2 = 32 - x^2$

$y = \sqrt{32 - x^2} \quad \dots\dots(2)$



نعوض معادلة (٢) في (١)

$A = 2x\sqrt{(32 - x^2)}$

$A = 2\sqrt{x^2(32 - x^2)}$

$\acute{A} = \dfrac{(2)[64x - 4x^3]}{2\sqrt{32x^2 - x^4}}$ (نجعل $\acute{A} = 0$)

$[64x - 4x^3 = 0] \; (\div 4) \Rightarrow x\,(16 - x^2) = 0$

$either \quad x = 0$ تهمل

$or \quad 16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow x = -4$ تهمل $\Rightarrow x = 4$

$2x = 2(4) = 8 \;\; cm$ طول المستطيل

نعوض في (٢)

$y = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$ عرض المستطيل

$A = 2xy = 32 \; cm^2$

س4/ جد ابعاد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $= 8\sqrt{2}cm$.

الحل :

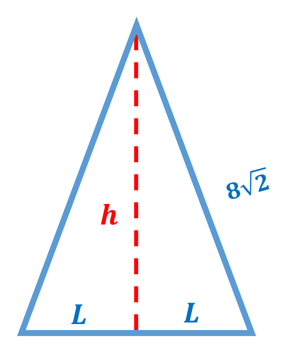
الفرضية : نفرض ارتفاع المثلث $= h$ نفرض طول ضلع المثلث $= 2L$ نفرض مساحة المثلث $= A$

الدالة : قانون مساحة المثلث (هي التي نقوم باشتقاقها) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}\times$ القاعدة × الارتفاع

العلاقة : مبرهنة فيثاغورس

$A = \dfrac{1}{2} . 2L . h$

$A = L . h \quad \dots\dots\dots(1)$



$h^2 + L^2 = (8\sqrt{2})^2$

$h^2 + L^2 = 128$

$h^2 = 128 - L^2$

$h = \sqrt{128 - L^2}$ ……. (2) نعوض (٢) في (١)

$A = L.\sqrt{128 - L^2}$

$A = \sqrt{L^2(128 - L^2)}$

$\acute{A} = \dfrac{256L - 4L^3}{2\sqrt{128L^2 - L^4}}$ ($\acute{A} = 0$ نجعل)

$\dfrac{256L - 4L^3}{2\sqrt{128L^2 - L^4}} = 0$

$[256L - 4L^3 = 0]$ $(\div 4)$

$L(64 - L^2) = 0$

$either\ \ L = 0$ تهمل

$or\ \ \ \ L^2 = 64 \Rightarrow L = \pm 8 \ \ \Rightarrow\ \ L = -8$ تهمل $\ \Rightarrow\ \ L = 8$ نعوض في (٢)

$2L = 2\ (8) = 16\ cm$ طول ضلع المثلث

$h = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8cm$ الارتفاع

$A = L\ h = (8)8 = 64\ cm^2$


س5 / جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$.

الحل :

الفرضية : نفرض طول المستطيل $x =$ نفرض عرض المستطيل $y =$ نفرض مساحة المستطيل $A =$

نفرض محيط المستطيل $P =$

الدالة : هي محيط المستطيل (هي التي نقوم باشتقاقها)   محيط المستطيل = 2 × (الطول+ العرض)

$P = 2(x + y)$ …………… (1)

العلاقة : مساحة المستطيل

$A = xy \Rightarrow 16 = xy \Rightarrow y = \frac{16}{x}$ ………… (2) نعوض (٢) في (١)

y
x

$P = 2\left(x + \dfrac{16}{x}\right)$

$P = 2(x + 16x^{-1})$

$P = 2x + 32x^{-1}$

$P' = 2 - 32x^{-2}$ ($p' = 0$ نجعل)

$[2 - 32x^{-2} = 0]$ $(\div 2)$

$1 - 16x^{-2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{16}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 16$

$x^2 = 16$ بالجذر $\Rightarrow x = 4$ نعوض في (١)

$y = \frac{16}{4} = 4$

$P = 2(4 + 4) = 16\ cm$

س6 / جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطر ها 3 cm .

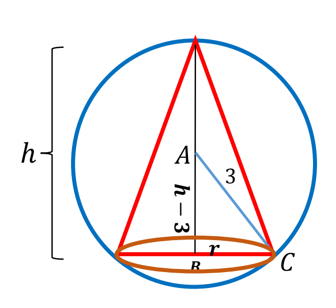
الحل :

الفرضية : نفرض ان نصف قطر المخروط $r =$ نفرض الارتفاع للمخروط $h =$ نفرض الحجم $V =$

الدالة : قانون حجم المخروط

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \dots\dots\dots\dots(1)$

العلاقة : مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية ABC



$r^2 + (h-3)^2 = (3)^2$

$r^2 + h^2 - 6h + 9 = 9$

$r^2 = 6h - h^2 \dots\dots\dots(2)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2)$ ($V' = 0$ نجعل)

$[\frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0]$ $(\times 3)$

$12h\pi - 3h^2\pi = 0$ $(\div 3\pi)$

$4h - h^2 = 0 \Rightarrow h(4 - h) = 0$

either $h = 0$ يهمل

or $4 - h = 0 \Rightarrow h = 4$ الارتفاع نعوض في معادلة (٢)

$r^2 = 6(4) - (4)^2 = 24 - 16 = 8$

$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ نصف القطر

$V = \frac{1}{3}\pi(8)(4) = \frac{32}{3}\pi\ cm^3$

س7 / جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة $B(6\,,8)$ والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث .

الحل :

الفرضية : نفرض النقطة $(x,0)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السيني

نفرض النقطة $(0\,,y)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الصادي

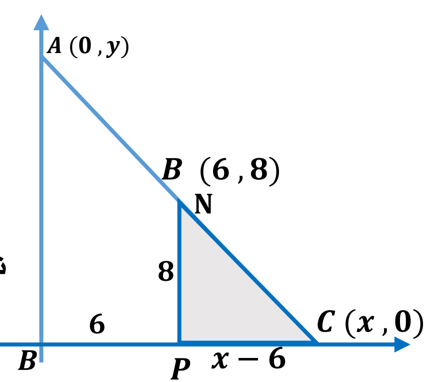
نفرض أبعاد المثلث $= x\,,y$ نفرض مساحة المثلث $= A$

الدالة : قانون مساحة المثلث

$$A=\frac{1}{2}x.y\;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

العلاقة : قانون الميل (ميل $\overline{AC}$ = ميل $\overline{BC}$)

النقطة $B(6\,,8)$ تنتمي للمستقيم $\overline{AC}$



$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\left(\frac{y-8}{0-6}=\frac{8-0}{6-x}\right)$ طرفين في وسطين

$$(y-8)(6-x)=-48\Rightarrow 6y-xy-48+8x=-48$$

$$6y-xy+8x=0$$

$y(6-x)=-8x\Rightarrow y=\frac{-8x}{6-x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ نعوض في (١)

$$A=\frac{1}{2}x.y=\frac{1}{2}x\,\frac{-8x}{6-x}=\frac{-4x^2}{6-x}\ldots\ldots\ldots(3)$$

الاشتقاق للدالة (معادلة (3))

$$A'=\frac{(6-x)(-8x)-(-4x^2)\,(-1)}{(6-x)^2}=\frac{-48x+8x^2-4x^2}{(6-x)^2}$$

$A'=\frac{-48x+4x^2}{(6-x)^2}$ (نجعل $A'=0$)

$$\frac{4x^2-48x}{(6-x)^2}=0\Rightarrow[\,4x^2-48x=0]\;(\div 4)$$

$$x^2-12x=0\;\Rightarrow x(x-12)=0$$

$either\;\; x=0$ يهمل

$or\;\;\; x-12=0\Rightarrow x=12$

$(12\,,0)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السيني

$$m\,\overline{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-0}{6-12}=\frac{8}{-6}=\frac{-4}{3}$$

$$(y-y_1)=m(x-x_1)$$

$(y-8)=\frac{-4}{3}(x-6)\overset{\times 3}{\Rightarrow} 3y-24=-4(x-6)$

$3y-24=-4x+24$

$4x+3y-48=0$

س8 / جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة $f(x)=12-x^2$ ومحور السينات ، راسان من رؤسه على المنحني والرأسان الاخران على محور السينات ، ثم جد محيطه .

الحل :

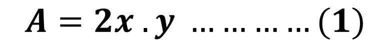
الفرضية : نفرض طول المستطيل $= 2x$ نفرض عرض المستطيل $= y$ نفرض مساحة المستطيل $= A$

الدالــــة : قانون مساحة المستطيل مساحة المستطيل = الطول × العرض

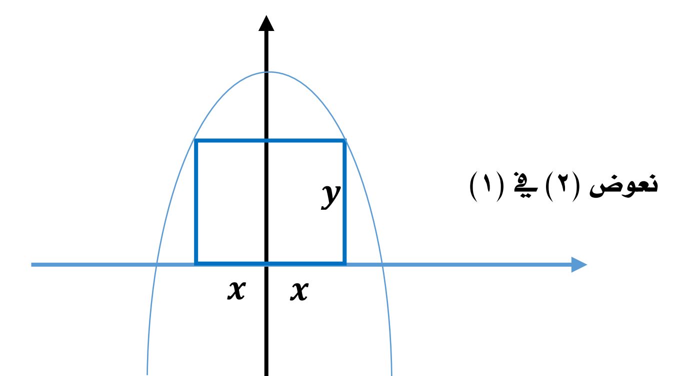
العلاقــة : المعادلة $y=12-x^2$

$A=2x\,.\,y$ ……… (1)

$y=12-x^2$ ……… (2)



نعوض (٢) في (١)



$A=2x(12-x^2)$

$A=24x-2x^3$

$A'=24-6x^2 \qquad (A'=0)$

$24-6x^2=0 \Longrightarrow 6x^2=24 \Longrightarrow x^2=4$

$x=2\ cm \Longrightarrow 2x=4\ cm$ الطول

$y=12-x^2 \Longrightarrow y=12-(2)^2=12-4=8$

$P=2(2x+y)$

$P=4x+2y=4(2)+2(8)=8+16=24\ cm$

س9 / جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(8\ cm)$ وطول قطر قاعدته $(12\ cm)$.

الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع الاسطوانه $h=$ نفرض نصف قطر قاعدتها $r=$ نفرض حجم المخروط $V=$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V=r^2\pi h$ ……… (1)

العلاقة : تشابه المثلثان $(ADE\ ,ABC)$

$\frac{8}{8-h}=\frac{6}{r}$

$8r=6(8-h)$

$8r = 48 - 6h \quad (\div 2)$

$4r = 24 - 3h$

$3h = 24 - 4r$

$h = \frac{24 - 4r}{3} \ldots\ldots\ldots..(2)$

$V = r^2\pi h = r^2\pi\left(\frac{24 - 4r}{3}\right)$

$V = \frac{\pi}{3}(24r^2 - 4r^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2)$ ($V' = 0$ نجعل)

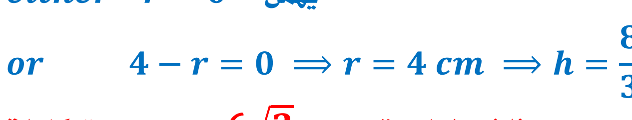
$\frac{\pi}{3}(48r - 12r^2) = 0$

$[16\pi r - 4\pi r^2 = 0] \quad (\div 4\pi)$

$4r - r^2 = 0$

$r(4 - r) = 0$

$either \quad r = 0$ يهمل


$or \quad 4 - r = 0 \Rightarrow r = 4\ cm \Rightarrow h = \frac{8}{3}$


س10 / جد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج منه دوران مثلث طول وتره $6\sqrt{3}$cm دوران دورة كاملة

حول احد ظلعيه القائمين

الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع المخروط $h =$ نفرض نصف قطر قاعدته $r =$ نفرض حجم المخروط $V =$

الدالة : قانون حجم المخروط

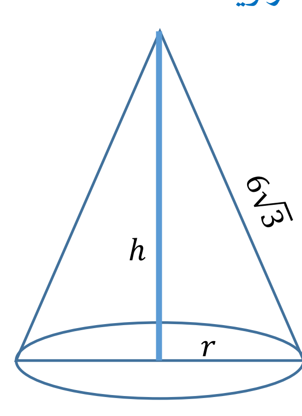
العلاقة : مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$V = \frac{1}{3}r^2\,\pi h \ldots\ldots\ldots(1)$

$h^2 + r^2 = (6\sqrt{3})^2$

$r^2 = 108 - h^2 \ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض معادلة (٢) في (١)



$V = \frac{1}{3}(108 - h^2)\,\pi h$

$V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) \quad (V' = 0)$

$36\pi - h^2\pi = 0 \overset{\div\pi}{\Rightarrow} h^2 = 36 \Rightarrow h = \pm 6$

$either \quad h = -6$ يهمل

$or \quad h = 6$ نعوض في (٢)

$r^2 = 108 - 6^2 = 108 - 36 = 72$

$r = \sqrt{72}\ cm$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(72)(6) = \frac{72 \times 6\pi}{3} = 144\pi\ cm^3$ أكبر حجم للمخروط

س11/ حاوية اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(125\,\pi)\ cm^3$ جد ابعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن .

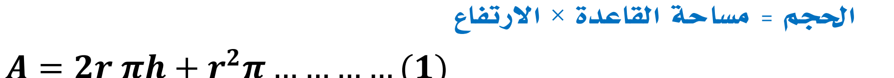
الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$ نفرض نصف قطر الاسطوانة $= r$

نفرض المساحة الكلية بدون غطاء $= A$ نفرض حجم الاسطوانة $= v$

الدالة : قانون المساحة المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

العلاقة : قانون حجم الاسطوانة الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع



$A = 2r\,\pi h + r^2\pi \dots\dots\dots\dots (1)$

$v = r^2\pi h \implies 125\,\pi = r^2\pi h$

$h = \frac{125}{r^2} \qquad \dots\dots\dots\dots (2)$

$A = 2r\,\pi h + r^2\pi = 2r\,\pi\left(\frac{125}{r^2}\right) + r^2\pi$

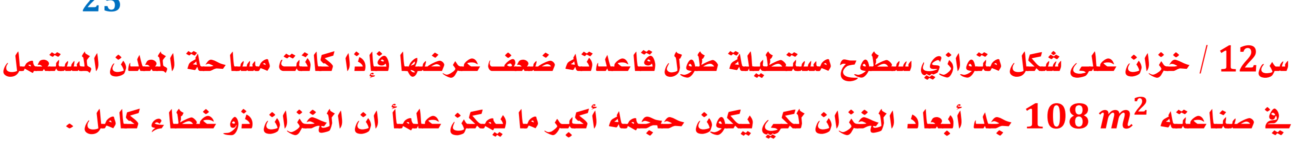
$A = 250\,\pi\, r^{-1} + r^2\pi$

$A' = -250\pi r^{-2} + 2r\pi \qquad (A' = 0$ نجعل$)$

$\frac{-250\pi}{r^2} + 2r\pi = 0 \xrightarrow{(\div 2\pi)} \frac{-125}{r^2} + r = 0 \implies \frac{125}{r^2} = r$

$r^3 = 125 \implies r = 5\ cm$ نعوض في (٢)

$h = \frac{125}{25} = 5\ cm$



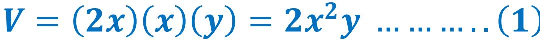
س12 / خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستعمل في صناعته $108\ m^2$ جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل .

الحل :

الفرضية : نفرض عرض القاعدة $= x$ نفرض طول القاعدة $= 2x$ نفرض الارتفاع $= y$

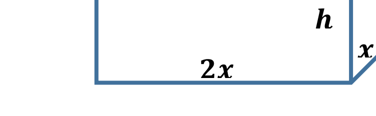
نفرض حجم الخزان $= V$

الدالة : حجم الخزان



$V = (2x)(x)(y) = 2x^2 y \dots\dots\dots (1)$

العلاقة : مساحة المعدن = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين



$$108 = 2\,(2x + x)y + 4x^2$$

$$108 = 2\,(3x)y + 4x^2 \quad (\div 2)$$

$$54 = 3xy + 2x^2$$

$$3xy = 54 - 2x^2 \Rightarrow y = \frac{54 - 2x^2}{3x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض معادلة (٢) في (١)

$$V = 2x^2\,\frac{54 - 2x^2}{3x} = \frac{2}{3}\,(54x - 2x^3)$$

$$V' = \frac{2}{3}\,(54 - 6x^2) \qquad (V' = 0)$$

$$\frac{2}{3}\,(54 - 6x^2) = 0 \overset{\times\frac{3}{2}}{\Rightarrow} \; 54 - 6x^2 = 0 \;\; (\div 6)$$

$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 3\,m \quad \Rightarrow \quad 2x = 6\,m$ طول القاعدة

$y = \dfrac{54 - 2(9)}{3(3)} = \dfrac{36}{9} = 4\,m$ عرض القاعدة

حلول الاسئلة العامة الخاصة بالفصل الثالث

س6/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي :

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$

b) $y = (\sin x + \cos x)^2$

c) $y = e^{x^2} \ln|2x|$

d) $y = \tan(\cos x)$

e) $y = x^2 \ln|x|$

f) $\ln(\tan^2 x) = y$

g) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

h) $y = \cos(e^{\pi x})$

الحل :

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$ نشتق حاصل ضرب دالتين

$x^3 \,.\, 2\,y.\frac{dy}{dx} + y^2 \,.\, 3x^2 - 2\,.\frac{dy}{dx} = 5 + 0$ نرتب

$$2x^3y\,.\frac{dy}{dx} - 2\,.\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}\,(2x^3y - 2) = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2x^3y - 2}$$

b) $y = (\sin x + \cos x)^2$

$\frac{dy}{dx} = 2\,(\sin x + \cos x)^1 \underline{(\cos x - \sin x)}$ نرتب

مشتقة داخل القوس

$\frac{dy}{dx} = 2\,(\sin x + \cos x)\,(\cos x - \sin x)$

$\frac{dy}{dx} = 2\,(\sin^2 x - \cos^2 x)$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ لدينا

$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$

c) $y = e^{x^2} \ln|2x|$ حاصل ضرب دالتين

$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(\frac{1}{2x})\,2 + \ln|2x|\,.\,e^{x^2}\,.\,2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,e^{x^2} + 2x\,e^{x^2}\ln|2x|$

d) $y = \tan(\cos x)$

هذه دالة واحدة فقط حيث أن $\cos x$ هي زاوية $\tan$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x\ \sec^2(\cos x)$

e) $y = x^2 \ln|x|$

$\frac{dy}{dx} = x^2\,.\frac{1}{x} + \ln|x|\,.\,2x$

$\frac{dy}{dx} = x + 2x\ln|x|$

f) $\ln(\tan^2 x) = y$

$y = \ln(\tan^2 x)$ $\ln x^n = n \ln x$

$y = 2\ln(\tan x)$

$\frac{dy}{dx} = 2\ \frac{1}{\tan x}\,.\sec^2 x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sec^2 x}{\tan x}$

g) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x}).\big(e^x + e^{-x}.(-1)\big) - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}.(-1))}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(e^x-e^{-x}).(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$$ نفتح الاقواس

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(e^{2x}-2\,e^x.e^{-x}+e^{-2x})-(e^{2x}+2\,e^x.e^{-x}+e^{-2x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}-e^{2x}-2-e^{-2x}}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$$

h) $y=\cos(e^{\pi x})$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(e^{\pi x}).\underline{e^{\pi x}.\pi}$$

مشتقة الزاوية

س7/ استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لإيجاد قيم c للدالة

$f(x)=x^4-2x^2\ ,\ x\in[-2,2]$

الحل : أولا :

١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-2,2]$ لأنها كثيرة الحدود .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2,2)$ لأنها كثيرة الحدود

٣) نجد $f(-2)\ ,\ f(2)$

$f(-2)=(-2)^4-2(-2)^2=16-8=8$

$f(2)=(2)^4-2(2)^2=16-8=8$ $\boxed{f(2)=f(-2)}$

$f(x)=x^4-2x^2$

$f'(x)=4x^3-4x$

عندما تكون مبرهنة رول متحققة فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة لـ c بحيث أن $f'(c)=0$

$f'(c)=4c^3-4c=0$

$4c(c^2-1)=0$

$either\ 4c=0\Rightarrow c=0$

$or\ \ c^2-1=0\Rightarrow c^2=1\ \Rightarrow c=\pm1\ \ \in(-2,2)$

ثانيا : الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{8-8)}{b-a}=\frac{0}{4}=0$$ ميل الوتر

$f(x)=x^4-2x^2$

$\acute{f}(x) = 4x^3 - 4x$

$\acute{f}(c) = 4c^3 - 4c$ ميل المماس ميل المماس = ميل الوتر

$4c(c^2 - 1) = 0$

$either \quad 4c = 0 \Rightarrow c = 0$

$or \quad c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1 \in (-2, 2)$

س8 / $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فإذا كانت $c = 2$ تنتمي الى الفترة $(-1, b)$ جد قيمة $a, b \in R$

الحل :

∵ الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول $f(a) = f(b)$

$f(x) = ax^2 - 4x + 5$

$f(-1) = a(-1)^2 - 4(-1) + 5$

$f(-1) = a + 9$

$f(b) = ab^2 - 4b + 5$

$\because f(-1) = f(b)$

$\therefore a + 9 = ab^2 - 4b + 5$

$\therefore a = ab^2 - 4b - 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$f(x) = ax^2 - 4x + 5$

$\acute{f}(x) = 2ax - 4 \Rightarrow \acute{f}(c) = 2ac - 4 \qquad c = 2$ لدينا

$\acute{f}(c) = 2a(2) - 4 = 4a - 4 \qquad \because \acute{f}(c) = 0$

$\therefore \quad 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$ نعوض في معادلة (1)

$1 = 1b^2 - 4b - 4$ نرتب

$b^2 - 4b - 5 = 0$

$(b - 5)(b + 1) = 0$

$either \quad b - 5 = 0 \rightarrow b = 5$

$or \quad b + 1 = 0 \rightarrow b = -1$ تهمل $(b > -1)$

س9/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاث أمثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $2.97\ cm$.

الحل : نفرض طول القاعدة $= x$ نفرض الارتفاع $= h$ $h = 3x$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = x^2 . h$

$V = x^2 . 3x$

$f(x) = 3x^3$

نفرض اقرب رقم للعدد المعطى $a = 3$, $b = 2.97$, $h = b - a = 2.97 - 3 = -0.03$

$f(a) = 3 . (3)^3 = 3 . 27 = 81$

$f(x) = 3x^3$

$f'(x) = 9x^2$

$f'(3) = 9\,(3^2) = 81$

$f(a + h) = f(a) + h . f'(a)$

$f\big(3 + (-0.03)\big) = f(3) + (-1)f'(3)$

$f(2.97) = 81 + (-0.03)\,81 = 81 - 2.43 = 78.57\ cm^3$

س10 / مخروط دائري قائم حجمه $210\,\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10\ cm$. وزاري ٢٠١٣ / د٢

الحل : حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi\, h$

$210\,\pi = \frac{1}{3} r^2 \pi\ .10 \Rightarrow r^2 = \frac{210\,(3)}{10} \Rightarrow r^2 = 21\,(3) \Rightarrow$

$\therefore\ r^2 = 63 \rightarrow r = \sqrt{63}\ cm$ طول نصف القطر

أصبح السؤال جد تقريبا مناسبا للمقدار $\sqrt{63}$

$a = 64$ نفرض

$b = 63$ نفرض

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$a = 64$ نفرض

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = \sqrt{64} = 8$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2 . 8} = \frac{1}{16} = 0.06$

$f(a+h) = f(a) + h . \acute{f}(a)$ القيمة التقريبية

$f(64+(-1)) = 8 + -1 .(0.06) = 8 - 0.06 = 7.94$

س11/ اذا كانت $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية لـ (1.01)

الحل :

$f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ الدالة

نفرض اقرب رقم للعدد المعطى $a = 1$ ، $b = 1.01$ ، $h = b - a = 1.01 - 1 = 0.01$

$f(a) = f(1) = \sqrt[5]{31.1 + 1} = \sqrt[5]{32} = 2$

$f(x) = (31x+1)^{\frac{1}{5}}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}.31$

$\acute{f}(a) = \frac{1}{5}(31a+1)^{\frac{-4}{5}}.31 \Rightarrow \acute{f}(1) = \frac{1}{5}(31(1)+1)^{\frac{-4}{5}}.31$

$\acute{f}(a) = \frac{31}{5}(2^5)^{\frac{-4}{5}} = \frac{31}{5} . \frac{1}{16} = \frac{31}{80} = 0.3875$

$h . \acute{f}(a) = (0.3875)(0.01) = 0.003875$

$f(a+h) = f(a) + h . \acute{f}(a)$

$f(1+0.01) = 2 + 0.38 .(0.01)$

$f(1.01) = 2 + 0.003875 = 2.003875$

س12 / باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني البياني للدالة $yx^2 = 1$

الحل :

$yx^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$ الدالة

1) أوسع مجال $= R \setminus \{0\}$ نضع المقام $= 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{0} \notin R$

عندما $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ غير ممكن لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين

3) التناظر : الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل لأن $f(-x) \neq -f(x)$

الدالة متناظرة مع محور الصادات لأن $f(-x) = f(x)$

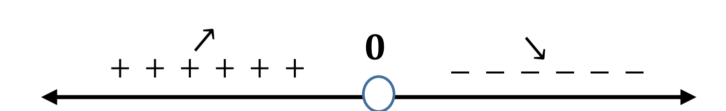
4) المحاذيات : مستقيم محاذي عمودي $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

مستقيم محاذي أفقي $y = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$

5) مناطق التزايد والتناقص

$y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \acute{y} = \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{x^4}$

$\acute{y} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$ لا توجد نهايات



$\{x : x < 0\}$ الدالة متناقصة في

$\{x : x > 0\}$ الدالة متزايدة في

6) مناطق التحدب والتقعر

$+ + + + + + + \quad 0 \quad + + + + + + +$

$\acute{y} = \frac{-2}{x^3}$

$\acute{y} = \frac{x^3 \cdot 0 - (-2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} \Rightarrow \acute{y} = \frac{6}{x^4} \neq 0$

$\{x: x > 0\}, \{x: x < 0\}$ الدالة مقعرة في الفترتين

7) الرسم البياني

x	y	(x, y)
1	1	$(1, 1)$
-1	1	$(-1, 1)$
$\pm\frac{1}{2}$	4	$\left(\pm\frac{1}{2}, 4\right)$
± 2	$\frac{1}{4}$	$(\pm 2, \frac{1}{4})$

القوانين المستخدمة في الفصل الثالث

١) المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ مساحة قاعدة واحدة

٣) محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

٤) مساحة المستطيل = الطول × العرض

٥) مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

٦) محيط المربع = ٤ × طول الضلع

٧) محيط الدائرة = $2r\pi$

٨) مساحة الدائرة = $r^2\pi$

٩) مساحة الكرة = $4\pi r^2$

١٠) حجم الاسطوانة = $r^2\pi\, h$

١١) حجم الكرة = $\frac{4}{3}r^3\pi$

١٢) M الميل = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

١٣) حجم المخروط = $\frac{1}{3}r^2\pi h$

١٤) حجم المكعب = L^3 حيث L طول الضلع

١٥) المساحة السطحية للمكعب = 4 × (طول الضلع)^2

١٦) المساحة الكلية للمكعب = 6 × (طول الضلع)^2

١٧) المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = محيط القاعدة × الارتفاع (القاعدة مستطيلة) اي محيط المستطيل

١٨) المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

١٩) حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

٢٠) محيط المثلث = مجموع أطوال اضلاعه الثلاثة

٢١) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

٢٢) قانون المسافة = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

الفصل الرابع

التكامل

الأستاذ محمد حميد

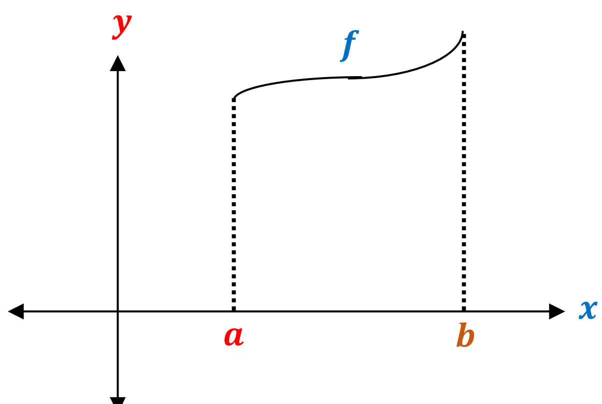
التكامل

المناطق المحددة بمنحنيات

هناك مناطق مستوية يمكن ايجاد مساحتها مثل المستطيل ، المثلث ، شبه المنحرف ، الدائرة .. الخ . ولكن هناك اشكال تسمى مناطق مضلعة لا يمكن ايجاد مساحتها الا بتقسيمها الى مناطق مثلثة او مربعة او مستطيلة .... الخ .

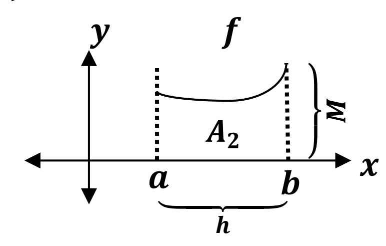
اما المنطقة A والتي تسمى منطقة تحت المنحني f وهي مجموعة النقاط المحصورة بين المنحني (بيان الدالة f) والمستقيمين $x = a$, $y = b$ ومحور السينات فلا يمكن تقسيمها الى مناطق معلومة (مثلث ، مستطيل ، دائرة ....الخ)

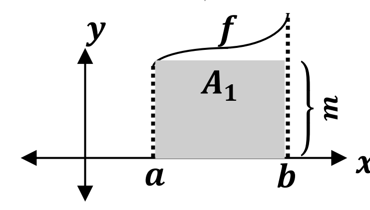
لذلك كيف يمكن حساب مساحتها ؟

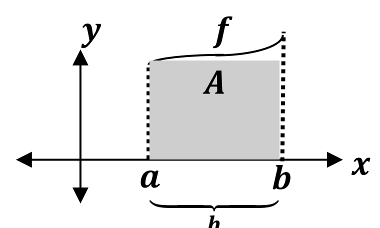


ايجاد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المستوية :

اذا كانت f دالة (منحني) وكانت (A) المنطقة المحصورة بينها وبين الاحداثي السيني في الفترة $[a , b]$ كما هو مبين في الشكل أدناه ، فيمكننا ايجاد مساحة المنطقة (A) المحددة بالرسم .







ملاحظات :

١) نرسم مستطيلاً من أدنى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a , b]$ ونرمز له بالرمز (A_1)

٢) نرسم مستطيلاً من أعلى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a , b]$ ونرمز له بالرمز (A_2)

٣) نوجد مساحة المنطقتين المستطيلتين (A_1) و (A_2)

٤) المطلوب هو حساب القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A بالاعتماد على القانون $A \approx \frac{A_1+A_2}{2}$

٥) مساحة أي منطقة هي عدد حقيقي غير سالب .

٦) $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ ، مساحة $A_1 \leq$ مساحة $A \leq$ مساحة A_2

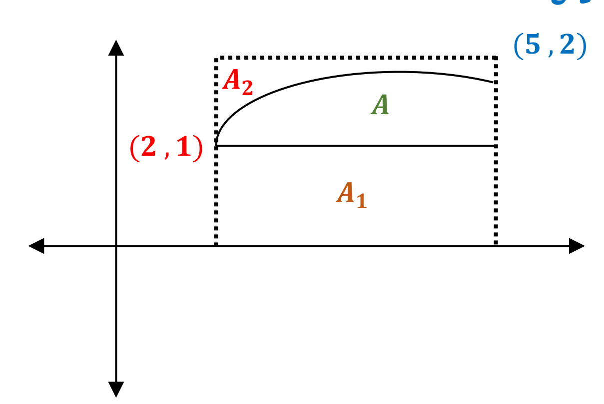
٧) نرمز لإرتفاع المستطيل الصغير A_1 بالرمز m حيث $m = f(a)$

٨) نرمز لإرتفاع المستطيل الكبير A_2 بالرمز M حيث $M = f(b)$

مثال : اوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A حيث :

$$A = \{ (x,y), 2 \le x \le 5 , \quad 0 \le y \le f(x) , \quad f(x) = \sqrt{x-1} \}$$

الحل :



$h = 5 - 2 = 3$

$f(x) = \sqrt{x-1}$

$m = f(2) = \sqrt{2-1} = 1$

$A_1 = m \,.\, h = (1)(3) = 3$ داخل المستطيل

$M = f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$

$A_2 = M \,.\, h = 2\,(3) = 6$ خارج المستطيل

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\ unit^2$$

مثال : أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$$A = \{(x,y): 1 \le x \le 2 , f(x) = x^2 + 1 \}$$

الحل :

$h = 2 - 1 = 1$

$m = f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

$A_1 = m.h = 2\,(1) = 2\ unit^2$ داخل المستطيل

$M = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$

$A_2 = M \,.\, h = 5\,(1) = 5\ unit^2$ خارج المستطيل

$A = \frac{A_1+A_2}{2} = \frac{2+5}{2} = 3\frac{1}{2}\ unit^2$ A المساحة التقريبية للمنطقة

مثال : أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 1 \le x \le 3 , f(x) = x^2 + 1\}$

الحل :

$h = 3 - 1 = 2$

$m = f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

$A_1 = m.h = 2\,(2) = 4\ unit^2$

$M = f(3) = (3)^2 + 1 = 10$

$A_2 = M \,.\, h = 10\,(2) = 20\ unit^2$

$A = \frac{A_1+A_2}{2} = \frac{4+20}{2} = \frac{24}{2} = 12\ unit^2$ A المساحة التقريبية للمنطقة

مثال : أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A=\{(x,y): 2\le x\le 5 , f(x)=3x^2-2\}$

الحل :

$h=5-2=3$

$m=f(2)=3(2)^2-2=10$

$A_1=m.h=10(3)=30\ unit^2$

$M=f(5)=3(5)^2-2=73$

$A_2=M.h=73(3)=219\ unit^2$

$A=\frac{A_1+A_2}{2}=\frac{30+219}{2}=\frac{249}{2}=124\frac{1}{2}\ unit^2$ المساحة التقريبية للمنطقة A

مساحة المنطقة المستوية بدقة اكبر :

١) نجزأ الفترة المعطاة $[a,b]$ الى فترات حسب الطلب وليكن عدد الفترات هو (n) وبذلك يكون طول الفترة $h=\frac{b-a}{n}$ حيث يرمز للاعداد من $(1,2,\dots,n)$ بالرمز σ (سكما) حيث ان $(\sigma=1,2,3\dots,n)$

٢) نحسب مساحة أكبر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n)$

٣) نحسب مساحة أصغر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}+\cdots+\overline{A_n})$

٤) نجد مساحة المنطقة A حسب القانون التالي $A=\frac{\sum A_n+\sum \acute{A}_n}{N}$ ونلاحظ أنه كلما زادت عدد نقاط التجزئة فإن المحصلة النهائية تقل وتصبح القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A أكثر دقة .

مثال : اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A $A=\{(x,y): 2\le x\le 5 , y=x^2+1\}$ وذلك باستخدام التجزئة

1. $\sigma_1=(2,3,5)$
2. $\sigma_2=(2,3,4,5)$

الحل :

$1)\ \sigma_1(2,3,5)=[2,3]+[3,5]$

المستطيلات في الداخل :

$m_1=f(2)=(2)^2+1=5$

$m_2=f(3)=(3)^2+1=10$

$A_1+A_2=(3-2)m_1+(5-3)m_2$

$A_1+A_2=1(5)+2(10)=5+20=25$

المستطيلات في الخارج :

$M_1=f(3)=(3)^2+1=10$

$M_2=f(5)=(5)^2+1=26$

$A'_1+A'_2=(3-2)M_1+(5-3)M_2$

$A'_1+A'_2=(3-2).10+(5-3).26=10+52=62$

$$\therefore A = \frac{25 + 62}{2} = \frac{87}{2} = 43\frac{1}{2} unit^2$$

$2)\ \sigma_2 = (2,3,4,5) = [2,3] + [3,4] + [4,5]$ تجزأ الفترة

المستطيلات في الداخل :

$$m_1 = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$m_2 = f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

$$m_3 = f(4) = (3)^2 + 1 = 17$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = (3-2)m_1 + (4-3)m_2 + (5-4)m_3$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1(5) + 1(10) + 1\,(17) = 32\ unit^2$$

المستطيلات في الخارج :

$$M_1 = f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

$$M_2 = f(4) = (4)^2 + 1 = 17$$

$$M_3 = f(5) = (5)^2 + 1 = 26$$

$$A'_1 + A'_2 + A'_3 = (3-2)M_1 + (4-3)M_2 + (5-4)M_3$$

$$A'_1 + A'_2 + A'_3 = 1(10) + 1(17) + 1\,(26) = 53\ unit^2$$

$$A = \frac{\sum A_n + \sum \acute{A}_n}{N} \Longrightarrow \therefore A = \frac{32 + 53}{2} = \frac{85}{2} = 42\frac{1}{2} unit^2$$

واجب : اوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A باستخدام التجزئة :

$A = \{(x,y): 2 \leq x \leq 5\ , y = \ x^2 - 3\}$

a) $\sigma_1 = (2,3,5)$

b) $\sigma_2 = (2,3,4\ ,5)$

الجواب : a) $\frac{63}{2}$ b) $\frac{61}{2}$

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

يرمز للمجاميع العليا $U(\sigma,f)$

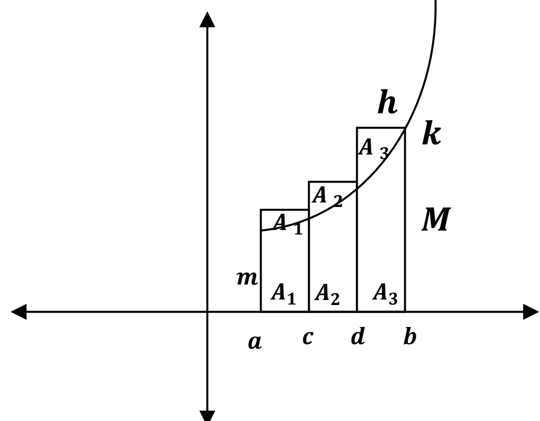
يرمز للمجاميع السفلى $L(\sigma,f)$

$$\boxed{U(\sigma,f) \geq L(\sigma,f)}$$

- سنعتبر الدالة : $f[a,b] \longrightarrow R$ مستمرة على الفترة $[a\ ,b]$ حيث يمكن ان تكون الدالة متزايدة أو متناقصة أو تحتوي على نقطة حرجة .
- اذا كانت التجزيئات متساوية والدالة هي عبارة عن ثابت في هذه الحالة يتساوى المجموع الاعلى مع المجموع الاسفل .



- اذا أردنا استخراج m نعوض الرقم الاصغر لبداية الفترة واذا اردنا استخراج M نعوض الرقم الاكبر الذي تنتهي به الفترة .
- في حالة احتواء الفترة الجزئية على نقطة حرجة نحسب قيم بداية الفترة ونهايتها وقيمة النقطة الحرجة وتكون القيمة الصغيرة هي m والقيمة الاكبر هي M .
- اذا لم نشترط أن تكون $f(x) \geq 0$ فان من المتوقع ظهور المجموعة السفلى عدد موجب أو سالب أو صفر وبالمثل للمجموعة العليا .



مثال : لتكن $f(x) = 5 + 2x$, $f: [1,4] \to \mathbb{R}$ جد المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$.

نتبع ما يلي لحل هذه الاسئلة :

١- تجزأ الفترة (ويفضل ان تكون منتظمة) .

٢- نشتق الدالة ونساوي المشتقة للصفر فاذا كان الجواب عددا ثابتا فاذا كانت موجبة فالدالة متزايدة واذا كانت سالبة فهي متناقصة ، اما اذا حصلنا على قيمة (x) نستخدم الاختبار للاشارة (الطريقة السابقة) ونجد هل هي متزايدة او متناقصة . وبطريقة اخرى نشتق المشتقة الثانية فاذا كان الناتج موجبا فإن النهاية تكون صغرى وعندها نكتب القيمة المؤجلة في m ثم نعوض طرفي الفترة المؤجلة ثم نختار اكبر الناتجين ليكون في حقل M ، أما اذا كانت المشتقة الثانية سالبة فتكون النهاية عظمى محلية وعندها نكتب القيمة المؤجلة M ثم نعوض طرفي الفترة المؤجلة ونختار اصغر الناتجين ونضعه في حقل m .

٣- نكتب الجدول وهو ثابت لا تتغير حقوله .

٤- ننتبه الى ما يلي : اذا كانت الدالة متزايدة فانه m_i حيث m هي (اصغر قيمة للدالة) تاخذ $f(a)$ وكذلك للدالة المتزايدة فان M_i حيث M (هي اكبر قيمة للدالة) تاخذ $f(b)$.

الحل : $f : [1,4] \to R$

$f(x) = 5 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$ الدالة متزايدة في مجالها

$h = \frac{b-a}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$ ثلاث فترات $\Rightarrow \sigma = [1\,,2], [2\,,3], [3\,,4]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1)$ $= 5+2 = 7$	$M_1 = f(2) = 5+4$ $= 9$	7	9
$[2,3]$	1	$m_2 = f(2)$ $= 5+4 = 9$	$M_2 = f(3) = 5+6$ $= 11$	9	11
$[3,4]$	1	$m_3 = f(3)$ $= 5+6 = 11$	$M_3 = f(4) = 5+8$ $= 13$	11	13

$\therefore\ L(\sigma,f) = \sum(h_i)(m_i) = 7+9+11 = 27 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum(h_i)(M_i) = 9+11+13 = 33$

مثال : اذا كانت $f(x) = 3x - x^2 \quad , \quad f:[0,4] \to R$ اوجد كل من :

$L(\sigma,f) \quad , \quad U(\sigma,f)$ ، مستخدما اربعة تجزيئات منتظمة.

الحل :

$$\sigma = [0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$$

$$f(x) = 3x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3-2x \Rightarrow 3-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [0,4]$$

اشارة $f'(x)$: على خط الأعداد من 0 إلى 4: $+ + + + + + + +$ قبل $\frac{3}{2}$ ، $- - - - - -$ بعد $\frac{3}{2}$ (النقاط 0 ، 1 ، $\frac{3}{2}$ ، 2 ، 3 ، 4)

أي ان العدد الحرج يوجد في الفترة $[1,2]$

$$x = \frac{3}{2} \in [1,2] \Rightarrow \boxed{f(1) = 2}\ ,\ \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}}\ ,\ \boxed{f(2) = 2}\ \ M = \frac{9}{4}\ ,\ m = 2$$

ملاحظة : $\frac{3}{2}$ تقع ضمن الفترة $[1,2]$ لذلك نعوض $\frac{3}{2}$ بدل x ضمن فترتها ، وعندما نصل الى فترات التناقص نعوض لكل m_i بـ $f(b)$ وبدل M_i بـ $f(a)$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[0,1]$	1	$m_1 = f(0) = 0$	$M_1 = f(1) = 3-1 = 2$	0	2
$[1,2]$	1	$m_2 = f(1)$ $= 3-1 = 2$	$M_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = 3.\frac{3}{2} - \frac{3}{2}$ $= \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{2}$
$[2,3]$	1	$m_3 = f(3)$ $= 3(3) - 9 = 0$	$M_2 = f(2) = 6-4 = 2$	0	2
$[3,4]$	1	$m_4 = f(4)$ $= 12-16 = -4$	$M_2 = f(3) = 9-9 = 0$	-4	0

$L(\sigma,f) = \sum(h_i)(m_i) = 0+2+0+(-4) = -2 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum(h_i)(M_i) = 2 + \frac{9}{2} + 2 + 0 = 6\frac{1}{4}$

لاحظ ان $\quad L(\sigma,f) \le U(\sigma,f)$

حل تمارين (1 – 4)

س1 / اوجد كل من $L(\sigma,f)$, $U(\sigma,f)$ لكل مما يأتي :

1) $f:[-2,1]\to R$, $f(x)=3-x$

a) $\sigma=(-2,0,1)$

b) تقسيم الفترة $[-2\,,1]$ الى ثلاث فترات جزئية منتظمة .

الحل :

a) الفترات هي $[-2\,,0]\,,[0\,,1]$

$f(x)=3-x\Rightarrow \acute{f}(x)=-1\neq 0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متناقصة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[-2,0]$	2	$m_1=f(0)=3-0=3$	$M_1=f(-2)$ $=3+2=5$	6	10
$[0,1]$	1	$m_2=f(1)=3-1=2$	$M_2=f(0)$ $=3-0=3$	2	3

$L(\sigma,f)=\sum(h_i)(m_i)=8$, $U(\sigma,f)=\sum(h_i)(M_i)=13$

ملاحظة : اذا طلب في السؤال ايجاد المساحة التقريبية A $A=\frac{8+13}{2}=\frac{21}{2}=10.5\ unit^2$

b) تقسم الفترة الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-(-2)}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$\because f(x)=3-x\Rightarrow \acute{f}(x)=-1\neq 0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متناقصة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i=h_im_i$	$U_i=h_iM_i$
$[-2,-1]$	1	$m_1=f(-1)$ $=3+1=4$	$M_1=f(-2)$ $=3+2=5$	4	5
$[-1,0]$	1	$m_2=f(0)$ $=3-0=3$	$M_2=f(-1)$ $=3+1=4$	3	4
$[0,1]$	1	$m_3=f(1)$ $=3-1=2$	$M_3=f(0)$ $=3-0=3$	2	3

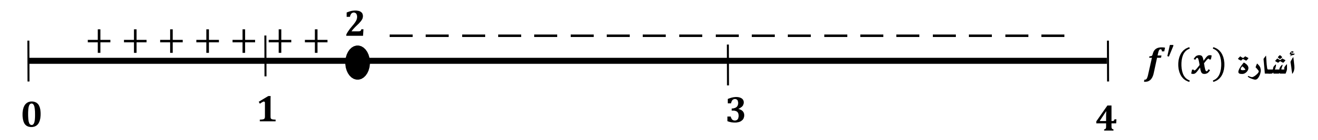
$L(\sigma,f)=\sum(h_i)(m_i)=9$, $U(\sigma,f)=\sum(h_i)(M_i)=12$

س2/ اذا كان $\sigma=(0,1,2,3,4)$, $f(x)=4x-x^2$, $f:[0,4]\to R$

الحل : الفترات هي $[0,1]\,,[1,2]\,,[2,3]\,,[3,4]$

$f(x)=4x-x^2\Rightarrow \acute{f}(x)=4-2x\Rightarrow 4-2x=0\Rightarrow x=\frac{4}{2}=2\in[1,2]$

$\therefore$ توجد نقطة حرجة هي $(2\,,4)$ وهي نهاية عظمى محلية ولا تجزئ الفترة



الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[0,1]$	1	$m_1 = f(0) = 0$	$M_1 = f(1) = 4 - 1 = 3$	0	3
$[1,2]$	1	$m_2 = f(1) = 4(1) - 1 = 3$	$M_2 = f(2) = 8 - 4 = 4$	3	4
$[2,3]$	1	$m_3 = f(3) = 12 - 9 = 3$	$M_3 = f(2) = 8 - 4 = 4$	3	4
$[3,4]$	1	$m_4 = f(4) = 16 - 16 = 0$	$M_4 = f(3) = 12 - 9 = 3$	0	3

$L(\sigma,f) = \sum (h_i)(m_i) = 6 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum (h_i)(M_i) = 14$

احيانا يطلب في السؤال ايجاد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A وكما يلي :

نقوم بحل السؤال كما هو اعلاه ثم يضاف اليه

$A_1 = L(\sigma,f) = 6 \quad , \quad A_2 = U(\sigma,f) = 14 \Rightarrow A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{6+14}{2} = 10$

س3/ $f : [1,4] \to R \quad , f(x) = 3x^2 + 2x$

a) $\sigma = (1,2,4)$

b) أستخدم ثلاث تجزيئات متساوية

الحل :

a) $\sigma = (1,2,4)$

الفترات $[1,2]$, $[2,4]$

$f(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow \acute{f}(x) = 6x + 2$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin [1,4]$

لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في الفترة $[1,4]$

وسوف يكون $m_i = f(a) \quad , \quad M_i = f(b)$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1) = 5$	$M_1 = f(2) = 16$	5	16
$[2,4]$	2	$m_2 = f(2) = 16$	$M_2 = f(4) = 56$	32	112
				$L(\sigma,f) = 37$	$U(\sigma,f) = 128$

$L(\sigma,f) = \sum (h_i)(m_i) = 37 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum (h_i)(M_i) = 128$

b) $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$

الفترات هي $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$

$f(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow \acute{f}(x) = 6x + 2$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin [1,4]$$

لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة على الفترة $[1,4]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1) = 5$	$M_1 = f(2) = 16$	5	16
$[2,3]$	1	$m_2 = f(2) = 16$	$M_2 = f(3) = 33$	16	33
$[3,4]$	1	$m_3 = f(3) = 33$	$M_3 = f(4) = 56$	33	56
				$L(\sigma,f) = 54$	$U(\sigma,f) = 105$

$$L(\sigma,f) = \sum (h_i)(m_i) = 54 , \quad U(\sigma,f) = \sum (h_i)(M_i) = 105$$

تعريف التكامل

اذا كانت $f[a,b] \to R$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه يوجد عدد حقيقي وحيد k بحيث لأي تجزئة (σ) في الفترة $[a,b]$ فإن $L(\sigma,f) \le K \le U(\sigma,f)$

نسمي العدد K التكامل المحدد للدالة (f) على الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ويقرأ التكامل من a الى b للدالة (f) ونسمي a,b حدي التكامل .

ملاحظات :

١) اذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإن $\left\{L(\sigma,f) \le \int_a^b f(x)dx \le U(\sigma,f)\right\}$ وتكون القيمة التقريبية لهذا التكامل $\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \int_a^b f(x)dx$

٢) اذا كانت الدالة $f(x) \ge 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx$ يعطي مساحة المنطقة A تحت المنحني f وهو عدد غير سالب ، dx تشير الى أن حدي التكامل ، أما a,b قيمتان للمتغير x .

٣) اذا كانت الدالة $f(x) \le 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \le 0$ وهذا لا يدل على المساحة ، أما مساحة المنطقة A فهي ستساوي

$$-\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

٤) أن قيمة $\int_a^b f(x)dx$ تتوقف على الفترة $[a,b]$ وعلى قيمة $f(x)$

مثال : لتكن $f(x) = x^2$ ، $f : [1,3] \to R$ ، أوجد قيمة تقريبية للتكامل اذا جزئت الفترة $[1,3]$ الى تجزئتين .

الحل : الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ لأنها كثيرة حدود

$$\because f(x) = x^2 \Longrightarrow \acute{f}(x) = 2x \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin [1,3]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow \sigma = (1,2,3) , \qquad [1,2],[2,3]$$

∴الدالة متزايدة على الفترة $[1\,,3]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1\,,2]$	1	$m_1 = f\,(1) = 1$	$M_1 = f\,(2) = 4$	1	4
$[2\,,3]$	1	$m_2 = f(2) = 4$	$M_2 = f(3) = 9$	4	9
				$L(\sigma\,,f) = 5$	$U(\sigma\,,f) = 13$

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{L(\sigma\,,f) + U(\sigma\,,f)}{2} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9\ unit^2$$

مثال : لتكن $f\,(x) = 2x - 3$, $f : [2\,,5] \to R$ ، أوجد $\int_2^5 f(x)dx$

الحل : الدالة مستمرة في مجالها لأنها كثيرة حدود

$f\,(x) = 2x - 3 \Rightarrow \acute{f}\,(x) = 2 \neq 0$
$\sigma = (\,2\,,3\,,5) \quad \Rightarrow \sigma = [2\,,3]\,,[3\,,5]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[2\,,3]$	1	$m_1 = f\,(2) = 4 - 3 = 1$	$M_1 = f\,(3) = 3$	1	3
$[3\,,5]$	2	$m_2 = f(3) = 6 - 3 = 3$	$M_2 = f(5) = 7$	6	14
				$L(\sigma\,,f) = 7$	$U(\sigma\,,f) = 17$

$$\int_2^5 (2x-3)dx = \frac{7+17}{2} = 12\ unit^2$$

ملاحظة : في التكامل اذا لم يذكر عدد التجزئة يمكن أخذ تجزئة منتظمة .

ملاحظة : في الدالة الثابتة يكون $m_i = M_i$ لكل الفترات ويكون $L(\sigma\,,f) = U(\sigma\,,f)$ لكل فترة جزئية ولكل تجزئة .

مثال : لتكن $f[1\,,5] \to R$, $f\,(x) = 3$ ، أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)dx$

الحل : الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1\,,5]$ لأنها كثيرة حدود

$f\,(x) = 3 \Rightarrow \acute{f}(x) = 0$
$\sigma = (\,1\,,3\,,5) \quad \Rightarrow \sigma = [1\,,3]\,,[3\,,5]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1\,,3]$	2	$m_1 = f\,(1) = 3$	$M_1 = f\,(3) = 3$	6	6
$[3\,,5]$	2	$m_2 = f(3) = 3$	$M_2 = f(5) = 3$	6	6
				$L(\sigma\,,f) = 12$	$U(\sigma\,,f) = 12$

$$\int_1^5 f(x)dx = \frac{12+12}{2} = 12\ unit^2$$

حل تمارين (4 – 2)

س1 : أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$

الحل : الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1, 3]$

$$\because \; f(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow 0 = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow -3 \neq 0$$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1, 2]$	1	$m_1 = f(2) = \frac{3}{2}$	$M_1 = f(1) = 3$	$\frac{3}{2}$	3
$[2, 3]$	1	$m_2 = f(3) = 1$	$M_2 = f(2) = \frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

$$L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \qquad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\int_1^3 \frac{3}{x}dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

س2 : لتكن $f(x) = 3x - 3$ ، $f[1, 4] \to R$ أوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ ثم تحقق هندسيا بحساب المنطقة تحت المنحني للدالة f .

الحل : الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1, 4]$ لأنها كثيرة حدود

$\because \; f(x) = 3x - 3 \Rightarrow f'(x) = 3 > 0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متزايدة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1, 2]$	1	$m_1 = f(1) = 0$	$M_1 = f(2) = 3$	0	3
$[2, 3]$	1	$m_2 = f(2) = 3$	$M_2 = f(3) = 6$	3	6
$[3, 4]$	1	$m_3 = f(3) = 6$	$M_3 = f(4) = 9$	6	9

$$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = 9 \qquad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 18$$

$$\int_1^3 (3x-3)dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{9+18}{2} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

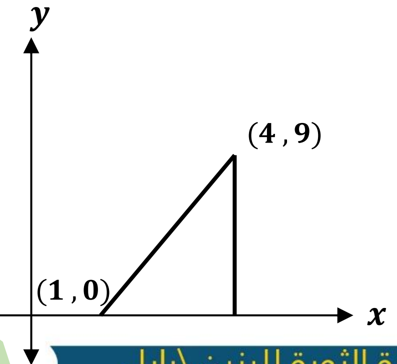
الحل الهندسي :

$f(1) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow (1, 0)$

$f(4) = 12 - 3 = 9 \Rightarrow (4, 9)$

A مساحة $= \frac{1}{2}$(القاعدة × الارتفاع)

A مساحة $= \frac{1}{2}((4-1) \times 9) = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$



س3 : أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_2^4 (3x^2 - 3)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$

الحل : الفترات $[2, 3]$, $[3, 4]$

$\because f(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 6x \quad \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [2, 4]$ الدالة متزايدة

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[2, 3]$	1	$m_1 = f(2) = 9$	$M_1 = f(3) = 24$	9	24
$[3, 4]$	1	$m_2 = f(3) = 24$	$M_2 = f(4) = 45$	24	45

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = 33 \qquad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 69$

$$\int_2^4 (3x^2 - 3)dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{33 + 69}{2} = \frac{102}{2} = 51$$

س4 : أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{-3}^2 f(x)dx$ حيث ان $f(x) = -4$

الحل : الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-3, 2]$ لأنها كثيرة حدود .

$\because f(x) = -4 \Rightarrow f'(x) = 0$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[-3, 0]$	3	$m_1 = f(-3) = -4$	$M_1 = f(0) = -4$	-12	-12
$[0, 2]$	2	$m_2 = f(0) = -4$	$M_2 = f(2) = -4$	-8	-8

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = -20 \qquad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = -20$

أو تحل حسب التجزيئات التالية :

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[-3, -1]$	2	$m_1 = f(-3) = -4$	$M_1 = f(-1) = -4$	-12	-12
$[-1, 2]$	3	$m_2 = f(-1) = -4$	$M_2 = f(2) = -4$	-8	-8

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = -20 \qquad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = -20$

$$\int_{-3}^2 (-4)\, dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{-20 - 20}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$

س5 : أوجد قيمة التكامل $\int_1^5 x^3\, dx$ باستخدام أربعة تجزيئات ممكنة .

الحل :

$\because f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 > 0$ لا توجد نقطة حرجة والدالة متزايدة

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

الفترات $[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[1,2]$	1	$m_1 = f(1) = 1$	$M_1 = f(2) = 8$	1	8
$[2,3]$	1	$m_2 = f(2) = 8$	$M_2 = f(3) = 27$	8	27
$[3,4]$	1	$m_3 = f(3) = 27$	$M_1 = f(4) = 64$	27	64
$[4,5]$	1	$m_4 = f(4) = 64$	$M_2 = f(5) = 125$	64	125

$$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = 100 \qquad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 224$$

$$\int_1^5 (-4)\, dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{100 + 224}{2} = \frac{324}{2} = 162$$

أمثلة اضافية محلولة

مثال : لتكن $f(x) = 3x^2 - 4x$ ولتكن $f : [0,3] \to R$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل باستخدام التجزئة $\sigma = (0,1,2,3)$ أو باستخدام ثلاث تجزئات متساوية .

الحل :

$$\because f(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 6x - 4 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in [0,1]$$

$$if\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0} \quad \boxed{f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}} \quad \boxed{f(1) = -1} \Rightarrow \boxed{m_i = -\frac{4}{3}}$$ أصغر قيمة

$\boxed{M_i = 0}$ أكبر قيمة

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

الفترات $[0,1], [1,2], [2,3]$

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L_i = h_i m_i$	$U_i = h_i M_i$
$[0,1]$	1	$m_1 = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$	$M_1 = f(0) = 0$	$L_1 = (1)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}$	$U_1 = (1)(0) = 0$
$[1,2]$	1	$m_2 = f(1) = -1$	$M_2 = f(2) = 4$	$L_2 = (1)(-1) = -1$	$U_2 = (1)(4) = 4$
$[2,3]$	1	$m_3 = f(2) = 4$	$M_1 = f(3) = 15$	$L_3 = (1)(4) = 4$	$U_3 = (1)(15) = 15$

$$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = -\frac{4}{3} - 1 + 4 = \frac{5}{3} \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 0 + 4 + 15 = 19$$

$$\int_0^3 f(x)\, dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{\frac{5}{3} + 19}{2} = \frac{\left(\frac{5+57}{3}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{62}{3}\right)}{2} = \frac{62}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{3}$$

النظرية الاساسية للتكامل

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a , b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a , b]$ بحيث :

$\acute{F}(x) = f(x) \ \forall \ x \in (a , b)$

$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

حيث تسمى F الدالة المقابلة للدالة f على الفترة $[a , b]$

مثال : اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي

$F(x) = \sin x \quad , \quad F : \left[0 , \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow R$ فأوجد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال : اذا كانت $f\ (x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1 , 5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد قيمة $\int_1^5 f(x)dx$.

الحل : $\int_1^5 f(x) = F(5) - F(1) = 3(5)^2 - 3(1)^2 = 75 - 3 = 72$

مثال : أثبت أن فيما اذا كانت $F(x) = x^3 + 2$ ، $F : [1 , 3] \longrightarrow R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$.

الحل : $\because$ $F(x) = x^3 + 2$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R لأنها كثيرة حدود

$\therefore$ F مستمرة على $[1 , 3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1 , 3)$

$\because \acute{F}(x) = 3x^2 = f(x) \qquad \forall \ x \in (1 , 3)$

$\therefore$ F دالة مقابلة للدالة f على $[1 , 3]$

مثال : أثبت ان الدالة $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ، $F : R \longrightarrow R$

هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = \cos 2x$ ، $f : R \longrightarrow R$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \ dx$

الحل :

$f(x) = \cos 2x \quad , \quad f : R \longrightarrow R$

دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

وهي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R أيضا

$$F'(x) = \frac{1}{2} (\cos 2x)\ 2 = \cos 2x = f\ (x) \qquad \forall \ x \in R$$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$\because \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\, dx = [\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2(0)$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$$

الجدول التالي يوضح العلاقة بين f والدالة المقابلة لها F

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	ax
$x^n \;, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n \;, n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n . f'(x) \;, n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$cos\,(ax+b)$	$\frac{1}{a}\, sin\,(ax+b)$
$sin\,(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\, cos\,(ax+b)$
$sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\, tan\,(ax+b)$
$csc^2(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\, cot\,(ax+b)$
$sec\, ax\, tan\, ax$	$\frac{1}{a} sec\, ax$
$csc\, ax\, cot\, ax$	$\frac{-1}{a} csc\, ax$

لذا نستنتج أن $\int f(x)dx = F(x) + c$ حيث أن c ثابت حقيقي

ملاحظة : اي نضيف الى الاس واحد ونقسم على الاس الجديد $\int_a^b x^n\; dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_a^b$

مثال : أوجد $\int_1^3 x^3\,dx$

الحل :

$$\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

مثال : أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} secx\,\tan x\,dx$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} secx\,\tan x\,dx = [secx]_0^{\frac{\pi}{3}} = sec\,\frac{\pi}{3} - sec\,0 = \frac{1}{cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{cos0} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

مثال : أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} csc^2 x\,dx$

الحل :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} csc^2 x\,dx = [-cot\,x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -[cot\,\frac{\pi}{2} - cot\,\frac{\pi}{4}] = -[0-1] = 1$$

مثال : أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\,dx$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2\,x\,dx = [tan\,]_0^{\frac{\pi}{4}} = tan\frac{\pi}{4} - tan\,0 = 1 - 0 = 1$$

مثال : أوجد $\int_1^2 x^2\,dx$

الحل :

$$\int_1^2 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

خواص التكامل المحدد

١) اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $f(x) \ge 0, \forall\, x \in [a,b]$

فإن $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

$f(x) = x^2 \ge 0, \forall\, x \in [-1,2]$ لأن $\int_{-1}^2 x^2\,dx \ge 0$

$f(x) = 3 > 0, \forall\, x \in [-2,3]$ لأن $\int_{-2}^3 3\,dx > 0$

$f(x) = (x+1) > 0, \forall\, x \in [2,3]$ لأن $\int_2^3 (x+1)dx > 0$

٢) اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $f(x) \le 0, \forall\, x \in [a,b]$

فإن $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$

فمثلاً :

$f(x) < 0 \;, \quad \forall\, x \in [1\,,2] \;,$ لأن $\int_1^2 (-2)dx < 0$

$f(x) < 0 \;, \quad \forall\, x \in [-2\,,-1] \;,$ لأن $\int_{-2}^{-1} x\,dx < 0$

٣) الثابت (العدد) يستخرج خارج التكامل

اذا F دالة مستمرة على $[a\,,b]$ $\forall x \in$ ، وكان c عدد حقيقي ثابتا فإن :

$$\int_a^b c\,f(x) = c\int_a^b f\,(x)$$

مثال : اذا كان $\int_2^5 f(x)dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5\,f(x)dx$

الحل :

$$\int_2^5 5\,f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5\times 8 = 40$$

٤) اذا كانت دالتان $f_1\,,f_2$ مستمرتين على الفترة $[a\,,b]$

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2) = \int_a^b f_1 \mp \int_a^b f_2$$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع اي عدد محدد من الدوال المستمرة على فترة $[a\,,b]$

مثال : اذا كانت $\int_1^3 f_2(x)dx = 17$, $\int_1^3 f_1(x)dx = 15$ فأوجد كلا من :

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))dx \;, \quad \int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx$$

الحل :

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx + \int_1^3 f_2(x)dx = 15 + 17 = 32$$

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx - \int_1^3 f_2(x)dx = 15 - 17 = -2$$

مثال : اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(x)dx$

الحل :

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx = \int_1^2 3x^2\,dx + \int_1^3 2x\,dx$$

$$[\frac{3x^3}{3}]_1^2 + [\frac{2x^2}{2}]_1^2 = [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = [8-1] + [4-1] = 7 + 3 = 10$$

٥) اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a\,,b]$ وكانت $c \in (a\,,b)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال : اذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$ ، $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فأوجد $\int_1^7 f(x)dx$

الحل :

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = 5 + 8 = 13$$

مثال : لتكن $f(x) = |x|$ أوجد $\int_{-3}^4 f(x)\,dx$

الحل : f دالة مستمرة على $[-3, 4]$ ولها قاعدتان هما :

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall\, x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^4 f(x)dx = \int_{-3}^0 (-x)\,dx + \int_0^4 x\,dx = [\frac{-x^2}{2}]_{-3}^0 + [\frac{x^2}{2}]_0^4$$

$$= \left[0 - \left(\frac{-9}{2}\right)\right] + \left[\frac{16}{2} - 0\right] = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

مثال : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall\, x \geq 1 \\ 3 & \forall x < 1 \end{cases}$ فأوجد $\int_0^5 f(x)dx$

الحل : الدالة f مستمرة على الفترة $[0, 5]$ وذلك لأنها مستمرة عند $x = 1$ لأن

1) $f(1) = 2\,(1) + 1 = 3$ معرفة

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} 3 = 3 = L_2 \end{cases}$

$\therefore\ L_1 = L_2$ الغاية موجودة

3) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ موجودة $\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$

$\therefore$ الدالة f مستمرة $\{x : x > 1\}, \{x : x < 1\}$

الدالة f مستمرة على الفترة $[0, 5]$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_0^1 3\,dx + \int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5 = [3 - 0] + [30 - 2] = 3 + 28 = 31$$

٦) اذا كان

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

مثال : أوجد $\int_3^3 x\,dx$

الحل : $\int_3^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$ أو باستخدام القاعدة مباشرة $\int_3^3 x\,dx = 0$

مثال : أوجد $\int_3^2 3x^2\,dx$

الحل :

$$\int_3^2 3x^2\,dx = -\int_2^3 3x^2\,dx = -[x^3]_2^3 = -[27-8] = -27+8 = -19$$

مثال : لتكن $f(x) = |x-2|$ أوجد $\int_0^4 f(x)dx$

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

1) $f(2) = |2-2| = 0$

2) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to2}(x-2) = 0 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to2} -(x-2) = 0 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2) = 0$

∴ الدالة f مستمرة على كل من $\{x: x>2\}, \{x: x<2\}$

الدالة f مستمرة على الفترة $[0,4]$

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^4 (x-2)dx$$

$$= [\frac{-x^2}{2} + 2x]_0^2 + [\frac{x^2}{2} - 2x]_2^4$$

$$= \left[\frac{-4}{2} + 4\right] - [0] + \left[\frac{16}{2} - 8\right] - \left[\frac{4}{2} - 4\right]$$

$$= [-2+4] + [2] = 4$$

مثال : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ x+2 & x < 2 \end{cases}$ أوجد $\int_{-1}^1 f(x)dx$

الحل : الدالة مستمرة في R لأنها مستمرة عند $x = 2$

1) $f(2) = 4$

2) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to2} x^2 = 4 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to2}(x+2) = 4 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$

$\therefore$ الدالة مستمرة

$\because$ الفترة $[-1, 1]$ تنتمي الى الفترة $x < 2$ فقط

$\therefore$ يكون التكامل $f(x) = x + 2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x+2)dx = [\frac{x^2}{2} + 2x]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2}+2\right] - \left[\frac{1}{2} - 2\right] = 4$$

مثال : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & x \geq 1 \\ 6x - 1 & x < 1 \end{cases}$ أوجد $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

الحل : الدالة f مستمرة على الفترة $[-2, 3]$ لأنها مستمرة عند $x = 1$ لأن

1) $f(1) = 3(1)^2 + 2(1) = 5$ معرفه

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} 3x^2 + 2x = 5 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} 6x - 1 = 5 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 5$

$\therefore$ الدالة f مستمرة على كل $\{x: x < 1\}, \{x: x > 1\}$

$\because$ الدالة f مستمرة على كل $[-2, 3]$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(6x-1)dx + \int_{1}^{3}(3x^2+2x)\,dx$$

$$= [3x^2 - x]_{-2}^{1} + [x^3 + x^2]_{1}^{3} = [2 - 14] + [36 - 2] = -12 + 34 = 22$$

حل تمارين (3 – 4)

س1 : أحسب كلا من التكاملات الاتية :

a) $\int_{-2}^{2}(3x-2)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{2}$

$$= \left[\frac{3(2)^2}{2} - 2(2)\right] - \left[\frac{3(-2)^2}{2} - 2(-2)\right]$$

$$= [6 - 4] - [6 + 4] = 2 - 10 = -8$$

b) $\int_{1}^{2}(x^{-2} + 2x + 1)dx = [\frac{x^{-1}}{-1} + x^2 + x]_{1}^{2}$

$$= \left[\frac{-1}{2} + 2^2 + 2\right] - \left[\frac{-1}{1} + 1^2 + 1\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{2} + 6\right] - [-1 + 1 + 1] = \left[\frac{-1}{2} + 6\right] - [1] = \frac{9}{2}$$

c) $\int_1^3 (x^4 + 4x)dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2x^2\right]_1^3$

$$= \left[\frac{(3)^5}{5} + 2(3)^2\right] - \left[\frac{1}{5} + 2(1)^2\right]$$

$$= \left[\frac{243}{5} + 18\right] - \left[\frac{1}{5} - 2\right] = \frac{242}{5} + 16 = \frac{322}{5}$$

d) $\int_0^2 |x - 1|dx$

$$\because |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x - 1|dx = \int_0^1 (-x + 1)dx + \int_1^2 (x - 1)dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{2} + 1\right] - [0] + \left[\frac{4}{2} - 2\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x + cosx)dx = \left[\frac{x^2}{2} + sinx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \left[\frac{(0)^2}{2} + sin\,0\right] - \left[\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$= [0] - \left[\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - sin\,\frac{\pi}{2}\right] = -\left[\frac{\pi^2}{8} - 1\right] = -\frac{\pi^2}{8} + 1$$

ملاحظة : $sin(-x) = -sin\,x$, $sin\,\frac{\pi}{2} = 1$

f) $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

$$= -\int_2^3 \frac{x^3 - 1}{x - 1}\,dx = -\int_2^3 \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}\,dx$$

$$= -\int_2^3 (x^2 + x + 1)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_2^3$$

$$= -\left[\left[\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3\right] - \left[\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right]\right] = -\left[\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3\right] - \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2\right]$$

$$= -\left(\frac{54 + 27 + 18 - 16 - 12 - 12}{6}\right) = -\frac{59}{6}$$

g) $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx = \int_1^3 \frac{2x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}\,dx = \int_1^3 2x - 4 + 5x^{-2}\,dx$

$$= \left[x^2 - 4x + \frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$= \left[9 - 12 - \frac{5}{3}\right] - [1 - 4 - 5] = \left[-3 - \frac{5}{3}\right] - [-8] = -\frac{14}{3} + 8 = \frac{10}{3}$$

س2 : أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$ حيث $F(x) = sinx + x$ حيث $f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$ حيث $f(x) = 1 + cosx$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$.

الحل : لكي نثبت أن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$F(x) = sinx + x$$

$$\acute{F}(x) = cosx + 1$$

$$\acute{F}(x) = cosx + 1 = f(x)$$

∴ الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = sin\,\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - [sin\,0 - 0] = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3+\pi}{6}$$

نثبت أن $F(x)$ مستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}[sin\,x + x] = sin\,a + a \quad , \quad \forall\, a \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right]$$

$$F(a) = sin\,a + a$$

$\lim_{x\to a} F(x) = F(a)$ ∴ $f(x)$ مستمرة في مجالها

س3 : أوجد كل من التكاملات التالية :

a) $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2 dx = \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)\,dx$

$$= \int_1^4 (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2)\,dx = \int_1^4 (x^3 - 3x - 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^4 = \left[\frac{4^4}{4} - \frac{3}{2}(16) - 8\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right]$$

$$= [64 - 24 - 8] - \left[\frac{1-6-8}{4}\right] = \left[32 + \frac{13}{4}\right] = \frac{128+13}{4} = \frac{141}{4}$$

b) $\int_{-1}^1 |x+1|dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$ خارج الفترة

لذا في هذه الحالة نأخذ الجزء الموجب فقط .

$$\int_{-1}^{1}|x+1|dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = [\frac{x^2}{2}+x]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2}+1\right]-\left[\frac{1}{2}-1\right] = 1+1 = 2$$

c) $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}\,dx$

$$= \int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\,dx = \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}\,dx$$

$$= \int_2^3 (x+1)(x^2+1)\,dx = \int_2^3 (x^3+x+x^2+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x\right]_2^3 = \left[\frac{3^4}{4}+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{3}+3\right]-\left[\frac{16}{4}+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}+2\right]$$

$$= \left[\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+12\right]-\left[8+\frac{32}{3}\right] = \frac{243+54+144-96-128}{12} = \frac{217}{12}$$

d) $\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)dx$

$$= \int_0^1 (x\sqrt{x}+4x+4\sqrt{x})dx = \int_0^1 \left(x(x)^{\frac{1}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left((x)^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{4x^2}{2}+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3}\right]-[0] = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

س4 : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \geq 3 \\ 6 & \forall x < 3 \end{cases}$ فأوجد $\int_1^4 f(x)dx$

الحل : نبرهن أن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[1\,,4]$

1) $f(3) = 2(3) = 6$ الدالة معرفة

2) $\lim_{x\to3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to3} 2x = 6 = L_1 \\ \lim_{x\to3} 6 = 6 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim_{x\to3} f(x) = f(x) = 6$ ∴ الدالة مستمرة

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_1^3 6\,dx + \int_3^4 2x\,dx$$

$$= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4 = [18-6]+[16-9] = 12+7 = 19$$

س5 : اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \forall x\geq 0\\ 2x & \forall x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ وزاري ٢٠١٤ / د١

الحل : نبرهن أن الدالة مستمرة على الفترة $[-1\,,3]$ وذلك باثبات انها مستمرة عند $x=0$

$$1)\ \ f(0)=3(0)^2=0$$

$$2)\ \ \lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} 3x^2=3(0)^2=0=L_1\\ \lim\limits_{x\to 0} 2x=2(0)=0=\ \ L_2\end{cases}$$

الغاية موجودة $L_1=L_2$

$$3)\ \ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)=\int_{-1}^{0} 2x+\int_{0}^{3} 3x^2=[x^2]_{-1}^{0}+[x^3]_{0}^{3}\quad=[0-1]+[27-0]=-1+27=26$$

التكامل غير المحدد

اذا كانت للدالة f المستمرة على الفترة $[a\,,b]$ دالة مقابلة F فإنه يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة f وكل منها يساوي $F+C$ حيث C يمثل عدد ثابت والفرق بين اكثر من اثنين منها يساوي عدد ثابت .

- تسمى مجموعة الدوال المقابلة $F+C$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على الفترة $[a\,,b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)dx$ اذا كان رمز متغير الدالة هو x .
- يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على صورة $C\in R\quad ,\quad \int f(x)dx=F(x)+C$
- عملية التكامل غير المحدد هو العملية المعاكسة لعملية التفاضل أي أحداهما تنهي دور الأخرى .

مثال : أوجد تكامل الدوال الاتية :

الحل :

$$(a)\int (3x^2+2x+1\ \ )\,dx=\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x+c\ =\ x^3+x^2+x+c$$

$$(b)\int (cosx+x^{-2})dx\ =\ sinx+\frac{x^{-1}}{-1}+c=sin\,x-x^{-1}+c==sin\,x-\frac{1}{x}+c$$

$$(c)\int (csc3x\,cot3x\,)dx=\frac{1}{3}\int (3)(csc3x\,cot3x\,)dx=\frac{-\,csc3x}{3}+c$$

$$(d)\int (sin\,ax+sec^2 3x)dx\ =\int \frac{1}{a} sin\,ax\,.\,a\,dx+\int \frac{1}{3} sec^2 3x\,.\underbrace{(3)}_{\text{المشتقة للزاوية}}\ dx$$

$$=\frac{-cos\,ax}{a}+\frac{tan\,3x}{3}+c$$

$(e)\ \int (x + \sec x \tan x)dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + c$

$(f)\ \int \sin(2x+4)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+4)\underbrace{(2)}_{\text{المشتقة للزاوية}}\,dx = \frac{-1}{2}\cos(2x+4) + c$

نلاحظ أن كل قوس مرفوع الى اس يجب اتباع ما يأتي :

أ) نرتب حدود القوس .

ب) يجب ان تكون مشتقة داخل القوس موجودة .

ج) عند التكامل نقوم بحذف المشتقة .

مثال : جد التكامل $\int (x^2+3)^2\,(2x)\,dx$

الحل : $f(x) = x^2+3$ ، $\acute{f}(x) = 2x$ اي ان $\int [f(x)]^2\,\acute{f}(x)\,dx$

$\because$ المشتقة متوفرة اذن تكامل بصورة مباشرة

$\int (x^2+3)^2\,(2x)\,dx = \frac{[x^2+3]^3}{3} + c$

ملاحظة : $\int \cos x\,dx = \sin x + c$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

مثال : جد التكامل $\int (3x^2+8x+5)^6\,(3x+4)\,dx$

الحل :

$$= \int (3x^2+8x+5)^6\underbrace{(3x+4)}_{\text{نضرب } 2\times}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{قسمنا على } 2}\int (3x^2+8x+5)^6\underbrace{(6x+8)}_{\text{المشتقة}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c = \frac{1}{14}\,(3x^2+8x+5)^7 + c$$

مثال : جد التكامل لكل مما يأتي :

$a)\ \int \sin^4 x \cos x\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} + c$

$b)\ \int \tan^6 x \sec^2 x\,dx = \frac{\tan^7 x}{7} + c$

مثال : جد التكامل $\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$

الحل :

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{[x^2+2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{6}[x^2+2]^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال : جد التكامل $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{-2}{3}}] \, . \underbrace{\frac{3}{3}}_{\text{نضرب ونقسم على 3}} = 3\int \underbrace{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}_{\text{مشتقة داخل القوس}} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3\frac{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 6\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + c$$

في الدوال المثلثية علينا مراعاة ما يأتي :

١) نرتب بحيث نضع الدالة المثلثية ثم المشتقة .

٢) يجب ان تكون المشتقة للدالة المثلثية موجودة .

مثال : جد تكامل

$$1)\int x^2 sinx^3\, dx = \int sinx^3\, x^2\, dx = \frac{1}{3}\int sinx^3 \underbrace{3x^2}_{\text{مشتقة الزاوية}} dx = -\frac{1}{3}cos\, x^3 + c$$

$$2)\int sinx\, cos^5x\, dx = \int cos^5x\, sin\, x\, dx = \int [cosx]^5 sinx\, dx\,].\frac{-1}{-1}$$

$$= -\int [cosx]^5(-sinx)\, dx = -\frac{[cosx]^6}{6} + c$$

$$3)\int \frac{dx}{cos^2x\sqrt{1+tan\, x}} = \int (1+tanx)^{-\frac{1}{2}} . \frac{1}{cos^2x} dx$$

$$= \int (1+tanx)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{sec^2x}_{\text{المشتقة}} dx = \frac{(1+tanx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1+tanx} + c$$

$$4)\int tan\, x\, sec^4x\, dx = \int sec^4x\, tan\, x\, dx = \int sec^3x \underbrace{secx\, tan\, x}_{\text{مشتقة الدالة}} dx = \frac{(secx)^4}{4} + c$$

$$5)\int tan^6x\, sec^2x\, dx = \int tan^6x \underbrace{sec^2x}_{\text{مشتقة الدالة}} dx = \frac{1}{7}tan^7x + c$$

$$6)\int x\sqrt{x+3}\ dx = \int x+3-3\,(\sqrt{x+3})\, dx = \int ((x+3)-3)(x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int (x+3)^{\frac{3}{2}} dx - 3\int (x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

1) $\int sec^2\theta\, d\theta = tan\,\theta + c$

2) $\int csc^2\theta\, d\theta = -cot\,\theta + c$

3) $\int tan^2\theta\, d\theta = \int (sec^2\theta - 1)\, d\theta = \int sec^2\theta\, d\theta - \int d\theta = tan\,\theta - \theta + c$

4) $\int cot^2\theta\, d\theta = \int (csc^2\theta - 1)\, d\theta = \int csc^2\theta\, d\theta - \int d\theta = -cot\theta - \theta + c$

5) $\int sin^2\theta\, d\theta = \int \frac{1-cos\,2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\int d\theta - \frac{1}{2}\int cos\,2\theta \underbrace{(2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} d\theta\right]$

$= \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2} sin\,2\theta) + c = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} sin\,2\theta + c$

6) $\int cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+cos\,2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\int d\theta + \frac{1}{2}\int cos\,2\theta \underbrace{(2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} d\theta\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2} sin\,2\theta\right) + c = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} sin\,2\theta + c$

7) $\int sin\,(ax+b) = -\frac{1}{a} cos\,(ax+b)$

8) $\int cos\,(ax+b) = \frac{1}{a} sin\,(ax+b)$

مثال : جد تكاملات كل مما يأتي :

1) $\int 9\,sin\,3x\,dx = 3\int \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الزاوية}} sin\,3x\,dx = -3\,cos\,3x + c$

2) $\int x^2 sin\,x^3\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} sin\,x^3 dx = -\frac{1}{3} cos\,x^3 + c$

3) $\int \sqrt{1 - sin2x}\,dx = \int \sqrt{sin^2x + cos^2x - 2sin\,x\,cos\,x}\,dx$

$= \int \sqrt{sin^2x - 2sin\,x\,cos\,x + cos^2x}\,dx = \int \sqrt{(sinx - cosx)^2}\,dx$

$= \int \pm(sin\,x - cosx)\,dx$

$= \pm(-cos\,x - sinx) + c = \mp(cos\,x + sin\,x) + c$

ملاحظة : $\int sec^2\,(ax+b) = \frac{1}{a} tan(ax+b)$

4) $\int sin^4x\,dx = \int (sin^2x)^2\,dx = \int [\frac{1-cos2x}{2}]^2\,dx = \int \frac{(1-2cos\,2x + cos^2 2x)}{4}\,dx$

$$= \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\,dx + \int \cos^2 2x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\,dx + \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{2}(\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,.(4))\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

5) $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x)dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$

6) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x}dx = \int \tan^{-3}\sec^2 x\,dx = \frac{\tan^{-2}x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$

$\int \sec ax \tan ax = \frac{1}{a}\sec ax$ | $\int \csc ax \cot ax = -\frac{1}{a}\csc ax$

7) $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)dx$

$$= \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cos x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

8) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int \tan x \sec^2 x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

9) $\int \sin 6x\ \cos^2 3x\,dx = \int (2\sin 3x \cos 3x)\cos^2 3x\ dx$

$$= \frac{2}{-3}\int \cos^3 3x\ (\sin 3x)(-3)dx = \left(\frac{-2}{3}\right)\frac{\cos^4 3x}{4} + c = \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$$

10) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}dx$

$$= \int \frac{(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x}dx$$

$$= \int (\cos 2x + \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

11) $\int \sin^2 3x\ dx = \int \frac{(1-\cos 6x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \int \frac{\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

12) $\int \cot^2 5x\,dx = \int (\csc^2 5x - 1)\,dx = \int \csc^2 5x - \int dx = -\frac{1}{5}\cot 5x - x + c$

13) $\int \tan^2 7x\,dx = \int (\sec^2 7x - 1)\,dx = \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

14) $\int \sin 4x\,.\cos^2 2x\,dx$

ملاحظة : اذا كانت الزوايا في السؤال غير متساوية فنساوي الزوايا

$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ | $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$= \int 2\sin 2x \cos 2x \cos^2 2x\, dx = 2\int (\cos 2x)^3 \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{2}{-2}\int (\cos 2x)^3\,(-2\sin 2x)dx = -\frac{(\cos 2x)^4}{4} + c$$

15) $\int \cos 2x \,.\, \sin^2 x\, dx$

$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$= \int \cos 2x\, \frac{1}{2}\,(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int (\cos 2x\,(2) - \frac{1}{2}[\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\, dx]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right] + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x + \frac{\sin 4x}{16} + c$$

مثال : جد تكامل $\int \cos^3 x\, dx$

الحل :

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\,.\cos x\, dx$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= \int \cos x - \sin^2 x \cos x\, dx = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + c$$

مثال : جد تكامل $\int (\cos^2 x)^2 dx$

الحل :

$$\int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx$$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right] + c = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

مثال : جد تكامل $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$

الحل :

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,(\cos^2 x + \sin^2 x)dx$$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \int \cos 2x\, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

مثال : جد تكامل $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{1-\cos x}$

الحل :

$$\int \frac{\sin^3 x\, dx}{1-\cos x} = \int \frac{\sin^2 x \sin x\, dx}{1-\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\, dx}{1-\cos x}$$

$$= \int \frac{(1-cosx)(1+cosx)\sin x\, dx}{1-\cos x} = \int (\sin x + \sin x\, cosx)\, dx$$

$$= -cosx + \frac{(\sin x)^2}{2} + c$$

مثال : جد تكامل $\int \sqrt{1+\sin 2x}\ dx$

الحل :

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\ dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\, cosx}\ dx$$

$$= \int \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x\, cosx + \cos^2 x}\ dx = \int \sqrt{(\sin x + cosx)^2} dx$$

$$= \int \pm(\sin x + cosx) dx = \pm(-cosx + \sin x) + c = \mp(\cos x - \sin x) + c$$

مثال : جد تكامل $\int \sqrt[3]{x^3+2x^5}\ dx$

الحل : نستخرج عامل مشترك لأن المشتقة داخل القوس غير موجودة

$$= \int \sqrt[3]{x^3(1+2x^2)}\ dx = \int x\sqrt[3]{1+2x^2}\ dx = \int x\,(1+2x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2x^2)^{\frac{1}{3}}.4x\, dx = \frac{1}{4}\frac{(1+2x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{16}(1+2x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$

حل تمارين (4 – 4)

جد تكاملات كل مما يأتي ضمن مجال الدالة

1) $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\, dx = \int \frac{(4x^4-12x^2+9)-9}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{4x^4}{x^2} - \frac{12x^2}{x^2}\right) dx$

$$= \int 4x^2 - 12\, dx = \frac{4}{3}x^3 - 12\,x + c$$

2) $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\, dx$ $\qquad \sqrt{7x} = \sqrt{7}\sqrt{x}\ ,\ \sqrt{5x} = \sqrt{5}\sqrt{x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3 - \sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7 .x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7 \left(\underbrace{-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}}_{\text{مشتقة داخل القوس}}\right) dx = \frac{-2}{\sqrt{35}}\frac{(3-\sqrt{5x})^8}{8} + c$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{35}}\left(3-\sqrt{5x}\right)^8 + c$$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1-\sin x}\,dx$

$$= \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)\cos x}{1-\sin x}\,dx = \int (1+\sin x)\cos x\,dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x \cos x)\,dx = \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + c$$

4) $\int \csc^2 x \cos x\,dx$ $\quad$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$$= \int \csc x \csc x \cos x\,dx = \int \csc x \frac{1}{\sin x}\cos x\,dx \;,\quad \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$= \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$$

ويحل بحل آخر بوضع $\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

5) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \int (3x^2+5)^{-4}.x\,dx$

$$= \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}.(6x)\,dx = \frac{1}{6}\frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{18(3x^2+5)^3} + c$$

6) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx = \int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx$ $\quad$ نجعل المقدار مربع كامل

$$= \int (x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + c$$

(مشتقة داخل القوس $= 1$)

7) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$$= \int \sin x\,dx - \int \sin x \cos^2 x\,dx = \int \sin x\,dx + \int (\cos x)^2(-\sin x)\,dx$$

$$= -\cos x + \frac{(\cos x)^3}{3} + c$$

8) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\quad$ والمقام هو مشتقة تلك الزاوية $\cos$ تكامل زاوية

$$= \int \frac{\cos(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = -2\int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة الزاوية}}dx$$

$$= -2\sin(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = -2\sin\sqrt{1-x} + c$$

لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي

$\int \frac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

تكامل زاوية sin والمقام هو مشتقة تلك الزاوية

$$= \int \frac{\sin(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx = -2\int \sin(1-x)^{\frac{1}{2}}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة الزاوية}}dx$$

$$= 2\cos(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = 2\cos\sqrt{1-x} + c$$

9) $\int(3x^2+1)^2\,dx$ ∵ مشتقة داخل القوس غير موجودة نفتح الاقواس

$$= \int(9x^4+6x^2+1)\,dx = \frac{9x^5}{5}+\frac{6x^3}{3}+x+c$$

10) $\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x}-\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}}$$ نستخرجه عامل مشترك $\sqrt{x}$

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}}{x^{\frac{3}{4}}}dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}\,.\,x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{-3}{4}}dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}.\,x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}.\underbrace{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}dx = 2\frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = 4\frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{3}{2}}}{3}+c$$

$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}$ لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}}dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}dx$$

$$= \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{-3}{4}}dx = \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.\,x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -2\int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}dx = -2\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = -4\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}{3}+c$$

11) $\int(1+\cos3x)^2\,dx$

$$= \int (1 + 2cos3x + cos^2 3x)dx \qquad \boxed{cos^2 3x = \frac{1}{2}(1 + cos6x)}$$

$$= \int \left(1 + 2cos3x + \frac{1}{2}(1 + cos6x)\right) dx$$

$$= \left[x + 2\frac{sin\,3x}{3} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{sin\,6x}{6}\right)\right] + c = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}sin\,3x + \frac{1}{12}sin\,6x + c$$

12) $\int sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\int sec^2 4x\,(4)\,dx = \frac{tan\,4x}{4} + c$

13) $\int csc^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (2)\,csc^2 2x\,dx = -\frac{cot\,2x}{2} + c$

14) $\int tan^2 8x\,dx = \int (sec^2 8x - 1)dx = \frac{tan\,8x}{8} - x + c$

15) $\int \frac{\sqrt{cot\,2x}}{1 - cos^2 2x}\,dx = \int \frac{\sqrt{cot2x}}{sin^2 2x}$

$$f(x) = cot\,2x \Rightarrow \acute{f}(x) = -2csc^2 2x$$

$$= -\frac{1}{2}\int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\,(-2csc^2 2x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(cot2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{-1}{3}(cot2x)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{-1}{3}\sqrt{(cot^3 2x)} + c$$

16) $\int cos^2 2x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 + cos4x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sin\,4x}{4}\right) + c = \frac{1}{2}x + \frac{sin\,4x}{8} + c$

17) $\int sin^2 8x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos16x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sin\,16x}{16}\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{sin\,16x}{32}$

18) $\int cos^4 3x\,dx = \int (cos^2 3x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + cos6x)\right]^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2cos6x + cos^2 6x)dx \qquad cos^2 6x = \frac{1}{2}(1 + cos12x)$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2cos6x + \frac{1}{2}(1 + cos12x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \frac{2sin\,6x}{6} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{sin\,12x}{12}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}sin\,6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}sin\,12x + c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}sin\,6x + \frac{1}{96}sin\,12x + c$$

اللوغاريتم الطبيعي

لتكن u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فإن مشتقة اللوغاريتم الطبيعي للدالة u هي :

$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة}} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$ وعليه فإن $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$ شرط ان تكون الدالة (u) موجبة

وتستخدم هذه الدالة في توفير المشتقة الأولى في بعض الدوال التي يصعب اشتقاقها وهي تملك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل :

$\ln 1 = 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x^y) = y \ln x$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

مثال : اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(3x^2 + 4) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

مثال : اذا كان $y = \ln(\sin x)$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

مثال : اذا كان $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow y = \ln x^{-2}$$

$$y = \ln x^{-2} = -2 \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \frac{1}{x} = \frac{-2}{x}$$

مثال : اذا كان $y = \ln(\tan x + x^2)$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(\tan x + x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x + x^2}(\sec^2 x + 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x + 2x}{\tan x + x^2}$$

مثال : اذا كان $y = \ln(\ln x)$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

مثال : اذا كان $y = \ln 3x$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$





مثال : جد مشتقة الدوال التالية :

$$1)\ \ y = ln(x \sin x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x}$$

$$2)\ \ y = ln(x\,y^2) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x\,y + y^2}{x\,y^2}$$

$$3)\ \ y = (\sin x)^x \Longrightarrow ln\,y = ln(\sin x)^x \Longrightarrow ln\,y = x\,ln\,sinx$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x \cos x}{\sin x} + ln\,(\sin x) \Longrightarrow y' = xy(\frac{\cos x}{\sin x}) + yln\,(\sin x)$$

تعريف : $\int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + c$ اي اذا كان المقام اسه (1) ومشتقته موجودة بالبسط فيكون تكامل ln .

مثال : جد تكامل كل مما يأتي :

$$1)\ \int \frac{dx}{x+1} = ln\,|x+1| + c$$

$$2)\ \int \frac{(4x+1)}{(2x^2+x)}\,dx = ln\,|2x^2+x| + c$$

$$3)\ \int cot\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = ln\,|\sin x| + c$$

$$4)\ \int \frac{dx}{x ln\,x} = \int \frac{\frac{1}{x}\,dx}{ln\,x} = ln\,|ln\,x| + c$$

$$5)\ \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\sin\theta} = ln|1+\sin\theta| + c$$

دالة اللوغاريتم الطبيعي

الدالة الاسية e^u هي دالة عكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي بمعنى آخر هناك بعض الدوال عندما نشتقها أو نكاملها ندخل عليها الدالة الاسية ثم عندما ننتهي نقوم بالغاء الدالة الاسية عن طريق ادخال دالة اللوغاريتم الطبيعي الهدف من هذه العملية هي لتغير شكل الدالة المراد العمل عليها .

$$\frac{d}{dx}(e^u) = (\text{الدالة})(\text{مشتقة الاس}) = e^u\frac{du}{dx}$$

وعليه فإن $\int e^u = e^u + c$ وهي تمتلك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل :

$e = 2.71828$ $\quad$ $e^x\,.\,e^y = e^{x+y}$ $\quad$ $\frac{e^x}{e^y} = e^x - e^y$ $\quad$ $e^0 = 1$ $\quad$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

مثال : لتكن $y = e^{\tan x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = e^{\tan x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\tan x}.(sec^2 x)$$

مثال : جد $\int x\, e^{x^2}\, dx$

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

الدالة الاسية (الاساس عدد ثابت)

نفرض أن a عدد ثابت يمثل أساس الدالة الاسية فإن مشتقة أي دالة اسية مرفوعة لقوة u هي

$\frac{d}{dx}a^u = (\text{الدالة})(\ln \text{الاساس})(\text{مشتقة الاس}) = a^u . \ln a \frac{du}{dx}$ وعليه فإن $\int (a^u)\, du = \frac{1}{\ln a} e^u + c$

وتتميز ببعض الخصائص التي ذكرناها في الدالة الاسية السابقة وسوف نوضح ذلك في المثال التالي :

مثال : جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $y = 4^{x^2-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4^{x^2-3}\ \ln(4)\ (2x) = \ln 4(4^{x^2-3})2x$

2) $y = 5^{sinx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{sinx} \ln 5\ (cosx)$

3) $y = (12)^{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (12)^{x^{\frac{1}{3}}} . \ln(12) . \frac{1}{3}\ x^{\frac{-2}{3}}$

4) $y = 7^{\frac{-x}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (7)^{\frac{-x}{3}} . \ln(7)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\ln(7).(7)^{\frac{-x}{3}}$

مثال : جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $y = e^{x^2+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^2+x}(2x+1)$

2) $y = e^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\sin x} cosx$

3) $y = e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-x}\ (-1) = -e^{-x}$

4) $y = lnx . e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = lnx . e^x + e^x . \frac{1}{x}$

5) $y = sin(xe^x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = cos\ (xe^x)[xe^x + e^x] = [xe^x + e^x]\ cos\ (xe^x)$

6) $y = 3^{(2+4^x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{(2+4^x)}(\ln 3)[4^x(\ln 4)(1)]$

7) $y = cot\ e^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -csc^2 e^{2x}(2e^{2x})$

$8)\ y = 5^{sinx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{sinx} ln\,(5) cosx = 5^{sinx} cosx\ ln\,(5)$

مثال : جد تكامل لكل مما يأتي :

$1)\ \int e^{x^2+x} \underbrace{(2x+1)}_{\text{مشتقة الاس}}\ dx\ = e^{x^2+x} + c$

$2)\ \int e^{sin\,x} \underbrace{(cos\,x)}_{\text{مشتقة الاس}}\ dx\ = e^{sin\,x} + c$

$3)\ \int x^2\, e^{x^3}\ dx\ = \int e^{x^3}\, x^2\, dx\ = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\ \underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتقة الاس}}\ dx\ = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

$4)\ \int (1+e^x)^2\, dx\ = \int (1 + 2e^x + e^{2x})\, dx$

$= \int \left[1 + 2e^x + \frac{1}{2} e^{2x}\,.2\right] dx = x + 2e^x + \frac{1}{2} e^{2x} + c$

$5)\ \int e^{tan\,x}\,.sec^2x\ dx = e^{tan\,x} + c$

$6)\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x}{2+tan\,x} dx\ = [ln\,(2+tan\,x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = ln\left(2+tan\frac{\pi}{4}\right) - ln\left(2+tan\,(-\frac{\pi}{4})\right)$

$= ln\,(2+1) - ln\,(2-1) = ln\,3 - ln\,1$

$7)\ \int \frac{e^{lnx}}{x} dx\ = e^{lnx} + c = x + c$

$8)\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx\ = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ = 2e^{\sqrt{x}} + c$

$9)\ \int 4^x\, dx = 4^x(\frac{1}{ln4}) + c$

$10)\ \int 3^{tan7x}(sec^2x7x)dx = \frac{1}{7}\int (7)\, 3^{tan7x}\,(sec^2x7x)dx = \frac{1}{7} 3^{tan7x}(\frac{1}{ln3}) + c$

حل تمارين (4 – 5)

س1/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

$a)\ y = ln\,3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

$b)\ y = ln\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})\,(\frac{2}{x}) = \frac{1}{x}$

$c)\ y = ln\,x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\,.2x = \frac{2}{x}$

d) $y = (ln\, x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(ln\, x).\frac{1}{x} = \frac{2}{x}\, ln\, x$

e) $y = \left(ln\, \frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow y = ln\, x^{-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} = -3x^{-1} = \frac{-3}{x}$

f) $y = ln\,(2 - cos\, x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(-sin\, x)}{2-cos\, x} = \frac{sin\, x}{2-cos\, x}$

g) $y = e^{-5x^2+3x+5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5}\,.(-10x+3) = (-10x+3)e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}}\,.ln\, 9\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\;(ln\, 9)$

i) $y = 7^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{-\frac{1}{4}x} ln\, 7\,.\left(-\frac{1}{4}\right) = 7^{-\frac{x}{4}}(\frac{-ln\, 7}{4})$

j) $y = x^2e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2.\, e^x + e^x\,.2x = xe^x(x+2)$

س2 / جد التكاملات الاتية :

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx$ مشتقة المقام موجودة فالتكامل هو ln

$= [ln\,|x+1|]_0^3 = ln\,(3+1) - ln\,(0+1) = ln\, 4 - ln\, 1 = ln\, 4 - 0 = ln\, 2^2 = 2ln\, 2$

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}dx = [ln\,|x^2+9|]_0^4 = ln\,|16+9| - ln\,|0+9| = ln\,(25) - ln\,(9)$

$= ln5^2 - ln3^2 = 2ln\, 5 - 2ln\, 3 = 2ln\frac{5}{3}$

c) $\int_{ln\, 3}^{ln\, 5} e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{ln\, 3}^{ln\, 5} e^{2x}\,.2\, dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{ln\, 3}^{ln\, 5} = \frac{1}{2}[e^{2ln\, 5} - e^{2ln\, 3}]$

$= \frac{1}{2}\left[e^{ln5^2} - e^{ln3^2}\right] = \frac{1}{2}[5^2 - 3^2] = \frac{1}{2}[16] = 8$

d) $\int_0^{ln\, 2} e^{-x}\, dx = -\int_0^{ln\, 2} e^{-x}\,(-1)dx = -[e^{-x}]_0^{ln2} = -[e^{-ln2} - e^0]$

$= -\left[e^{ln2^{-1}} - e^0\right] = -[2^{-1} - 1] = -\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}$

e) $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x\, dx = \left[\frac{(1+e^x)^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+e^0)^3}{3}\right] = \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{8}{3}$

ويمكن ان يحل السؤال بطريقة ثانية وهي توزيع e^x على القوس بعد فتح القوس

f) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{(x^3+4x+1)}dx = [ln\,(x^3+4x+1)]_0^1 = ln\,(1^3+4(1)+1 - ln\,(0^3+4(0)+1)$

$= ln\, 6 - ln\, 1 = ln\, 6 - 0 = ln\, 6$

g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^4 e^{x^{\frac{1}{2}}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[e^{x^{\frac{1}{2}}}\right]_1^4 = [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e^1$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x\, dx}{2+tan\, x} = [ln|2+tan\, x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = ln\left|2+tan\frac{\pi}{4}\right| - ln\left|2+tan(-\frac{\pi}{4})\right|$

$$= ln3 - ln1 = ln3 - 0 = ln\,3$$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} . \cos x\, dx$

$$= \left[\frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right] = 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right] = 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

j) $\int \cot^3 5x\, dx = \int \cot^2 5x \cot 5x\, dx = \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\, dx$

$$= \int (\cot 5x \csc^2 5x - \cot 5x)\, dx = \int (\cot 5x \csc^2 5x)\, dx - \int (\cot 5x) dx$$

$$= \frac{1}{5}\int (5)\cot 5x \csc^2 5x\, dx - \frac{1}{5}\int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}(5) dx$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5} ln\,|\sin 5x| + c = -\frac{1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5} ln\,|\sin 5x| + c$$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx = -[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right] = -[e^0 - e^1] = -1 + e$

l) $\int_1^2 xe^{-ln\, x}\, dx = \int_1^2 x\, e^{ln\, x^{-1}}\, dx = \int_1^2 x.x^{-1}\, dx = \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

س3/ اثبت أن :

a) $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = 2$

$$L.H.S = \int_1^8 \frac{(x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2)^{\frac{1}{3}}}\, dx = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} . x^{-\frac{2}{3}}\, dx = 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx\right)$$

$$= 3\left[\frac{(x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = 3.\frac{2}{3}[(8)^{\frac{1}{3}} - 1]^{\frac{3}{2}} - [\,(1)^{\frac{1}{3}} - 1]^{\frac{3}{2}} = 2[2 - 1]^{\frac{3}{2}} - [1 - 1]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2(1) = 2 = R.H.S$$

b) $\int_{-2}^4 |3x - 6| dx = 30$

$$|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & x \geq 2 \\ -3x + 6 & x < 2 \end{cases}$$

$$L.H.S = \int_{-2}^4 |3x - 6| dx = \int_{-2}^2 (-3x + 6)\, dx + \int_2^4 (3x - 6) dx$$

$$= [\frac{-3}{2}x^2 + 6x]_{-2}^{2} + [\frac{3}{2}x^2 - 6x]_{2}^{4}$$

$$= \left[\frac{-12}{2} + 12\right] - \left[\frac{-12}{2} - 12\right] + \left[\frac{48}{2} - 24\right] - \left[\frac{12}{2} - 12\right]$$

$$= [-6 + 12] - [-6 - 12] + [24 - 24] - [6 - 12]$$

$$= 6 + 18 + 0 + 6 = 30 = R.H.S$$

س4/ $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فإذا كان $\int_1^6 f(x)dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x)+3]dx = 32$ فجد $\int_{-2}^1 f(x)\,dx$

الحل :

$$\because \int_{-2}^{6} [f(x) + 3]dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3x]_{-2}^{6} = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3(6) - 3(-2)] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [18 + 6] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [24] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 32 - 24$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 8$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{6} f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 = 8 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 8 - 6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 2$$

س5/ اذا علمت أن $\int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\,dx$ فجد قيمة $a \in R$.

الحل :

$$\int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\,dx \Rightarrow [\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x]_1^a = 2[tan]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right]$

$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1 = 2[1 - 0] \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1 - 2 = 0$

$\left[\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 3 = 0\right] \times 2 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$

$(a+3)(a-2) = 0$

$either \quad a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$ يهمل

$or \quad a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad a > 1$ لأن

س6/ لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) فجد $\int_1^3 f(x)dx$

الحل : $\because$ للدالة نهاية صغرى

$f(x) = x^2 + 2x + k$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x = -1$

لأنه عندما يأتي في السؤال نهاية صغرى تمثل الاحداثي y في النقطة .

$(-1, -5)$ هي نقطة نهاية صغرى محلية وهي تحقق معادلة الدالة $f(x)$.

$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k \Rightarrow -5 = 1 - 2 + k \Rightarrow k = -4$

$f(x) = x^2 + 2x - 4$

$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\, dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 4x\right]_1^3 = \left[\frac{27}{3} + \frac{2(9)}{2} - 12\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{2} - 4\right]$

$= [9 + 9 - 12] - \left[\frac{1}{3} + 1 - 4\right] = 6 - \left[\frac{-8}{3}\right] = \frac{18 + 8}{3} = \frac{26}{3}$

س7/ اذا كان المنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ له نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)\, dx$

الحل : نقطة الانقلاب ناتجة من مساواة المشتقة الثانية للصفر

$f(x) = (x-3)^3 + 1$

$f'(x) = 3(x-3)^2$

$f''(x) = 6(x-3) \Rightarrow 6(x-3) = 0 \overset{\div 6}{\Rightarrow} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1$ نقطة الانقلاب هي $(3, 1)$

$$(3\,,1)\quad,\quad(a\,,b)\;\Rightarrow\; a\;=\;3\;\;,\;\;b=1$$

$$\int_0^b \acute{f}(x)dx\;-\;\int_0^a \acute{\acute{f}}(x)\,dx$$

$$\int_0^1 3(x-3)^2\;-\;\int_0^3 6(x-3)dx$$

$$=\;3\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1-\;6\left[\frac{(x-3)^2}{2}\right]_0^3$$

$$=[(1-3)^3-\;(0-3)^3\,]-[\,3(3-3)^2-3(0-3)^2]$$

$$=[-8+27]-[0-27]=[19+27]=46$$

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات :

١. نساوي الدالة المعطاة بالصفر ثم نحل المعادلة لإيجاد قيم x ومن ثم يتحول السؤال الى أحد الاحتمالات الخمسة التالية :

أ- اذا أعطيت الفترة $[a\,,b]$ في الدالة فنقوم بتصفير الدالة واستخراج قيم x فإذا كانت تنتمي الى الفترة المعطاة فنقوم بتجزئة التكامل الى جزئين أو أكثر .

أما اذا كانت لا تنتمي لها فلا نجزيء التكامل ولكن في كلتا الحالتين نقوم بأخذ القيم الناتجة المطلقة للتكاملات .

ب- تعطى القيم على شكل $[a\,,b]$ مثلا أو على شكل بعبارة المستقيمين $x=\;a\,,x\;=\;b$ ويكون لها نفس التفسير السابق .

ج- اذا لم تعطى فترة أو مستقيمين في السؤال فإن قيم x الناتجة ترتب تصاعديا وإعتبارها قيم التكامل دون اهمال اي متجهة وهي على الاقل قيمتين .

د- اذا كان المطلوب إيجاد المساحة بين منحني ومحور السينات ومستقيم $x\;=\;a$ فقط .

نقوم بإضافة هذه القيمة الى القيم الناتجة من مساواة الدالة بالصفر ثم ترتب تصاعديا وإعتبارها فترة دون اهمال اي قيمة .

ه- هناك بعض الدوال لا يمكن تحليلها لإيجاد قيمة x عن التصفير فإن المساحة تكون تكاملاً واحداً وعلى الفترة المعطاة .

مثال 1: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$.

الحل :

$$f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$either \;\; x = 0$$

$$or \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2 \quad \boxed{x = 0} \;,\; \boxed{x = 2} \;,\; \boxed{x = -2}$$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = [0] - [4 - 8] = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{2} = [4 - 8] - [0] = -4$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8 \;\; unit^2$$

مثال 2: جد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 3 , x = 1$

الحل : حيث لا تجزأ الفترة فنعتمد على الفترة المعطاة $[1, 3]$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 3]$$

$$A = \int_{1}^{3} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

مثال 3: جد المساحة المحددة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات .

الحل :

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$either \;\; x = 0$$

$$or \quad (x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\boxed{x = 0} \;,\; \boxed{x = 1} \;,\; \boxed{x = 2}$$

$$A_1 = \int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{0}^{1} \Rightarrow A_1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{1}^{2} \Rightarrow A_2 = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}\ unit^2$

مثال 4: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[2 , -3]$

الحل :

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \in [-2 , 3]$

$[-2 , -1]\ , [-1 , 1] , [1 , 3]$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = (\frac{-1}{3} + 1) - (\frac{-8}{3} + \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = 9\frac{1}{3}\ unit^2$$

مثال 5: : جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 + 4$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1 , 1]$

الحل : نجعل $y = 0$

$3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{3}$ لا يمكن

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 + 4)dx$$

$A = [x^3 + 4x]_{-1}^{1} = (1 + 4) - \ (-1 - 4) = (5 + 5) = |10| = 10\, unit^2$

ملاحظة :

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \qquad n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2$ حسب الحاجة

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2$ حسب الحاجة

مثال 6: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2} , \pi]$

الحل : نجعل $y = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \qquad n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2$

نأخذ قيم موجبة وسالبة لأن الفترة المعطاة موجبة وسالبة .

$n = 0 , x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ يجزئ التكامل

$n = 1 , x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل

$n = 2 , x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل

$n = -1 , x = -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل

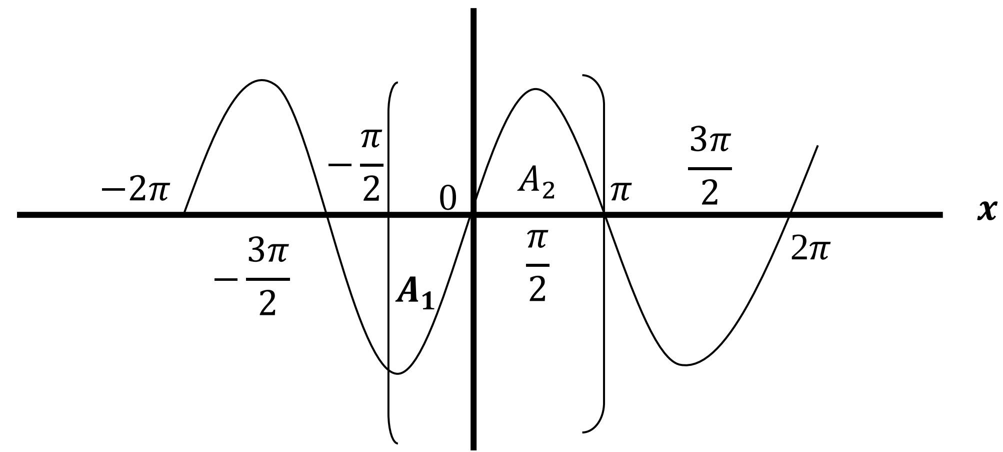
$n = -2 , x = -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$

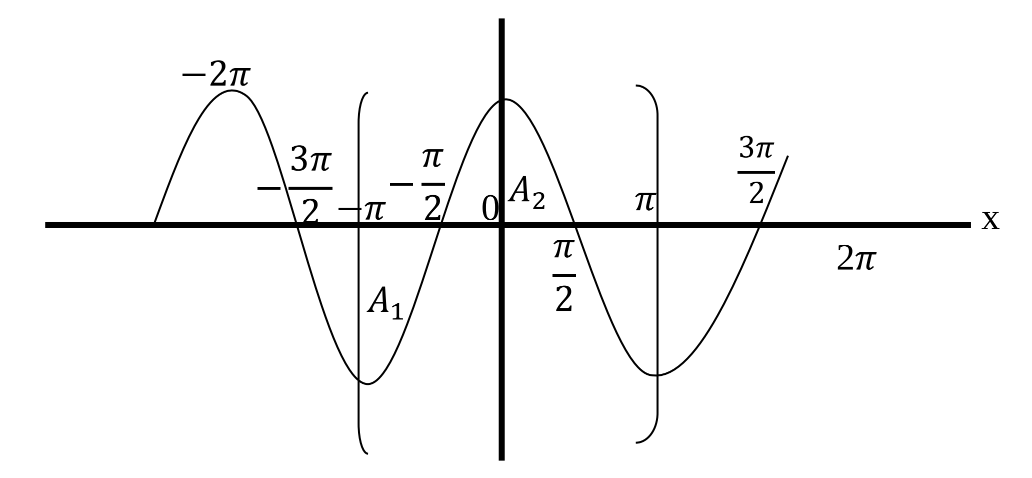
$$A = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-\cos x]_{0}^{\pi} = \left(-\cos 0 + \cos \frac{-\pi}{2}\right) + (-\cos \pi + \cos 0)$$

$$A = (-1+0) + (1+1) = |-1| + |2| = |3| = 3$$



ملاحظة : رسم منحني الـ sin فعلى اساسه نجد القيمة المنتمية الى الفترة المعطاة $\left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$.

مثال 7 : جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ وعلى الفترة $[-\pi , \pi]$.



ملاحظة : رسم منحني الـ cos فعلى اساسه نجد القيمة المنتمية الى الفترة المعطاة $[-\pi , \pi]$

$\cos x = 0 , \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in Z$

$n = 0 \ , \ x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi , \pi]$ يجزئ التكامل

$n = 1 \ , x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi , \pi]$ لا يجزئ التكامل

$n = -1 \ , x = \frac{-\pi}{2} \in [-\pi , \pi]$ يجزئ التكامل

$n = -2 \ , x = \frac{-3\pi}{2} \notin [-\pi , \pi]$ لا يجزئ التكامل

$n = 2 \ , x = \frac{5\pi}{2} \notin [-\pi , \pi]$ لا يجزئ التكامل

$$[-\pi , \pi] \Rightarrow \left[-\pi , -\frac{\pi}{2}\right] , \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right] , \left[\frac{\pi}{2} , \pi\right]$$

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \,\Big]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \,\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - 1 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4 \ unit^2$$

س1 / واجب / جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 4x$ ومحور السينات على الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$

س2 / واجب / جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \cos 2x$ ومحور السينات ضمن الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$

س3 / واجب / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 - 6x$ ومحور السينات .

المساحة المحددة بمنحنيين

اذا علمت معادلتي منحني $g(x)$ ، $f(x)$ المعرفتين على الفترة $[a , b]$ وكان المطلوب ايجاد المساحة بينهما فنقوم بايجاد الدالة المولدة وهي $h(x) = f(x) - g(x)$ مع مراعاة الاحتمالات الخمسة سابقة الذكر بالنسبة للدالة المولدة $h(x)$.

$$A = \left| \int_a^b h(x) \, dx \right|$$

ملاحظة : اذا كانت الدالة المولدة لها أكثر من صورة واحدة فيمكن إجراء التكامل على اي صورة منها ما لم نضرب بعدد أو نقسم على عدد أو نرفع الطرفين الى قوة معينة كأن تكون تربيع أو جذر .

مثال : جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

الحل : $h(x) = \sqrt{x} - x$ الدالة المولدة

بالتربيع $x = \sqrt{x}$

$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 1 \qquad x \in [0,1]$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx = [\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}} - \frac{x^2}{2}]_0^1 = [\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}]_0^1$$

$$A = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{6} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6} unit^2$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

الحل : $h(x) = x^3 - x$ الدالة المولدة

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow either\ x = 0 \quad or\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\boxed{x = 0} \quad , \quad \boxed{x = 1} \quad , \quad \boxed{x = -1} \qquad [-1, 0] \quad , \quad [0, 1]$$

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_0^1 (x^3 - x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^0 + [\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_0^1$$

$$A = (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0) = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = cos\ x$ ، $g(x) = sin\ x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

$$[sin\ x = cos\ x] \div cosx \Rightarrow tan\ x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$ زاوية الاسناد

دالة الظل موجبة في الربعين الأول والثالث

$$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \qquad or \qquad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (cos\ x - sinx)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\ x - sin\ x)dx\right| = \left|[sinx + cos\ x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + [sin\ x + cos\ x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\left(sin\frac{\pi}{4} + cos\ \frac{\pi}{4}\right) - sin\ \left(-\frac{\pi}{2}\right) + cos\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\left(sin\frac{\pi}{2} + cos\ \frac{\pi}{2}\right) - \left(sin\ \frac{\pi}{4} + cos\ \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1 + 0)\right| + \left|(1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| + \left|1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right|$$

$$A = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}| = |\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1| = 2\sqrt{2}\ \ unit^2$$

مثال : جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $y=-\sin x \;,\; y=\cos x$

الحل : زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$ حيث دالة الظل تكون سالبة في الربعين الثاني والرابع

$$-\sin x=\cos x \Longrightarrow -\tan x=1$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad or \quad x=2\pi-\frac{\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)dx=[\sin x-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A=|(1-0)-(-1-0)|=|1+1|=|2|=2\ unit^2$$

مثال : جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sin 2x \;,\; g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

$$h(x)=\sin 2x-\sin x$$

$$2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$$

$$\sin x(2\cos x-1)=0$$

$$either\quad \sin x=0\Longrightarrow x=0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{لا يجزئ} \quad x=\pi\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$or\qquad \cos x=\frac{1}{2}\Longrightarrow x=\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \qquad x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x(2\cos x-1)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x(2\cos x-1)\,dx$$

$$A=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)(-2\sin x)\,dx+\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-1)(-2\sin x)dx$$

$$A=-\frac{1}{4}\left[(2\cos x-1)^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left(-\frac{1}{4}\right)\left[(2\cos x-1)^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=-\frac{1}{4}\left[\left(2\cos\frac{\pi}{3}-1\right)^2-(2\cos 0-1)^2\right]-\frac{1}{4}\left[\left(2\cos\frac{\pi}{2}-1\right)^2-\left(2\cos\frac{\pi}{3}-1\right)^2\right]$$

$$A=\left|\frac{-1}{4}\left[(1-1)^2-(2-1)^2\right]\right|+\left|\frac{-1}{4}\left[(0-1)^2-(1-1)^2\right]\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

المسافة

المسافة : ويرمز لها بالرمز (d) وهي كمية غير متجهة ، أما الازاحة فهي $S\ (t)$ والسرعة $V\ (t)$ والتعجيل $a\ (t)$ وهي كميات متجهة لذلك فإن :

$$d\ =\int_{t_1}^{t_2}|V(t)|\ dt\quad ,\quad S\ (t)=\int_{t_1}^{t_2}V(t)\ dt\quad ,\quad V(t)=\int a\ (t)dt$$

ملاحظة : 1) اقصى مسافة يصل اليها الجسم عند السرعة = 0

2) بعد الجسم بعد مرور $3\ sec$ من البدء بالحركة $[0\ ,3]$

ملاحظات :

1. اذا كانت $V\ (t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم فإن المسافة المقطوعة في الثانية t هي $d\ =\ |\int_{t-1}^{t}V\ (t)dt|$ فمثلاً اذا طلب في السؤال جد المسافة خلال الثانية الثامنة يعني حساب $\int_7^8$
2. اذا كانت $V\ (t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم بعد مرور t ثانية من بدء الحركة فان بعد الجسم هو $S\ =\ \int_0^t V\ (t)\ dt$
3. واذا كانت $a\ (t)$ تمثل تعجيل جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V\ (t)$ فإننا (نكامل بالتكامل غير المحدد) $\int a\ (t)dt\ =V\ (t)+c$
4. الازاحة هي تكامل محدد السرعة ولا نأخذ المطلق لأن الناتج لا يهم اذا كان موجب أو سالب أو صفر .
5. أقصى سرعة يصل اليها الجسم عندما يكون التعجيل $=0$

مثال : جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V\ (t)=\ 2t-\ 4\ m/s$ فجد :

أ) المسافة المقطوعة في الفترة $[1\ ,3]$

$$V\ (t)=\ 0\quad \Rightarrow 2t-4=0\ \Rightarrow t=2\ \in[1\ ,3]$$

$$d\ =|\int_1^2(2t-4)dt\ |+|\int_2^3(2t-4)\ dt\ |=\left|[t^2-4t]_1^2+[t^2-4t]_2^3\right|$$

$$d=|(4-8)-(1-4)|+|(9-12)-(4-8)|\ =1+1=2$$

ب) الازاحة المقطوعة بالفترة $[3\ ,1]$

$$S\ (t)\ =\int_1^3(2t-4)dt=[t^2-4t]_1^3=[9-12]-[1-4]=-3+3=0$$

ج) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$d\ =|\int_4^5V\ (t)dt\ |=\ |\int_4^5(2t-4)dt\ |=\left|[t^2-4t]_4^5\right|=|[25-20]-[16-16]|=5\ m$$

د) بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

$$S = \left|\int_0^4 (2t-4)dt = [t^2 - 4t\,]_0^4\right| = [16-16] - [0] = 0$$

مثال : جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18\ \text{m/s}^2)$ سرعته قد أصبحت $(82\ m\ /s)$ بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة .

أحسب : 1) المسافة خلال الثانية الثالثة 2) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

3) جد السرعة بعد مرور 10 ثواني

الحل :

$$V(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow V(t) = \int 18\,dt = 18\,t + c$$

$V(t) = 82$ عندما $t = 4$

$$82 = 18(4) + c \Rightarrow c = 82 - 72 = 10$$

$$V(t) = 18\,t + 10$$

$$d = \int_2^3 (18\,t + 10)dt = [\frac{18\,t^2}{2} + 10\,t\,]_2^3$$

$$d = [81+30] - [36+20] = 111 - 56 = 55\,m$$

$$S = \int_0^3 (18t+10)dt = [9t^2 + 10t]_0^3 = [81+30] - [0] = 111\,m$$

$$V(t) = 18t + 10 \Rightarrow V(10) = 18(10) + 10 = 190\ m/s$$

حل تمارين (6 – 4)

1) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$ ، $x = -1$

الحل : نجعل $y = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$x = 0 \in [-1,1]$ $\qquad$ $x = 1 \in [-1,1]$

$$A = \left|\int_{-1}^0 f(x)dx\right| + \left|\int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-1}^0 (x^4 - x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 (x^4 - x)dx\right|$$

$$A = \left|[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^0\right| + \left|[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}]_0^1\right| = \left|(0-0) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - (0-0)\right|$$

$$= \left|\frac{-2-5}{10}\right| + \left|\frac{2-5}{10}\right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

2) جد المساحة المحددة للدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2, 3]$ وعلى محور السينات

الحل : نجعل $f(x) = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$either\ x = \pm 2 \in [-2, 3]$$

$$or \quad x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$ يهمل

$$x = 2 \in [-3, 3] \ or\ x = -2 \in [-2, 3]$$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right| + \left|\int_{2}^{3} f(x)dx\right|$$

$$A_1 = \left|\int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)dx\right|$$

$$A_1 = [\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x]_{-2}^{2} = \left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] - \left[\frac{-32}{5} + 8 + 8\right] = \frac{64 - 160}{5} = \frac{-96}{5}$$

$$A_2 = \left|\int_{2}^{3} (x^4 - 3x^2 - 4)dx\right| = [\frac{1}{5}x^5 - 3x^3 - 4x]_{2}^{3}$$

$$A_2 = \left[\frac{243}{5} - 27 - 12\right] - \left[\frac{-32}{5} - 8 - 8\right] = \frac{211 - 115}{5} = \frac{96}{5}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-96}{5}\right| + \left|\frac{-96}{5}\right| = \frac{192}{5}\ unit^2$$

3) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

الحل :

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$either\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$or \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^4 - x^2)\,dx\right|$$

$$A_1 = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} + [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = [0] - \left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] - [0]$$

$$= \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ unit^2$$

4) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

الحل : الفترة موجبة فقط فلا نعوض بالقيم السالبة حيث $n = 0, 1, 2$

$\sin 3x = 0 \qquad 3x = 0 + n\pi$

$n = 0$ عندما $\quad x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لا يجزئ

$n = 1 \qquad x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ يجزئ

$n = 2 \qquad x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لا يجزئ

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\frac{\left(-\cos 3\frac{\pi}{3}\right)}{3} - \frac{(-\cos 3\,(0))}{3}\right| + \left|\frac{\left(-\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{3} - \frac{\left(-\cos 3\frac{\pi}{3}\right)}{3}\right|$$

$$A = \left|\frac{(-\cos\pi)}{3} - \frac{(-\cos 3\,(0))}{3}\right| + \left|\frac{\left(-\cos\frac{3\pi}{2}\right)}{3} - \frac{(-\cos 3\,\pi)}{3}\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-(-1)}{3}\right] - \left[\frac{-1}{3}\right]\right| + \left|[0] - \left[\frac{-(-1)}{3}\right]\right| = \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

5) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل : نجعل $f(x) = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, 1$$

$$n = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$ يجزئ

$$n = 1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$ لا يجزئ

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right| = \left|\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\sin 2(0)}{2}\right| + \left|\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \frac{1}{2}\left|\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}|1 - 0| + \frac{1}{2}|0 - 1| = \frac{1}{2}|1| + \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ \ unit^2$$

ملاحظة : اذا كانت الصيغة

$$y = 1 - 2\sin x \ , \ y = \cos x - \sin x \ , \ y = \cos^4 y - \sin^4 y \ , \ y = 2\sin^2 x$$

$$y = 1 - 2\cos^2 x \ , \ y = \sin^2 x - \cos^2 x \xRightarrow{\text{كلها تعطي}} -\cos 2x$$

6) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \frac{1}{2}x$ ، $y = \sqrt{x-1}$ وعلى الفترة $[2, 5]$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1}$$ بتربيع الطرفين

$$\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \overset{\times 4}{\Rightarrow} x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \xRightarrow{\text{بالجذر}} x - 2 = 0$$

$$x = 2 \in [2, 5]$$ لا نجزئ التكامل

$$A = \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x-1}\right) dx$$

$$A = \left|\int_2^5 \left[\frac{1}{2}x - (x-1)^2\right] dx\right| = \left|\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)\right| = \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{16}{3}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\right| = \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{16}{3}\right) - \left(1 + \frac{2}{3}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{75 - 64 - 12 + 8}{12}\right| = \frac{7}{12}\ unit^2$$

7) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^2 \ , \ y = x^4 - 12$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$x^4 - 12 = x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

$$either \quad x = \pm 2 \qquad or \quad x = \pm\sqrt{-3}$$

$$A = \int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12)dx = |[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}x^3 - 12\,x]_{-2}^{2}|$$

$$A = \left|\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right) - \left(\frac{-32}{5} + \frac{8}{3} + 24\right)\right|$$

$$A = |\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48\,| = \left|\left(\frac{192 - 80 - 720}{15}\right)\right| = \left|\left(\frac{-608}{15}\right)\right| = \frac{608}{15}\ unit^2$$

8) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \sin x$ $\ g(x) = \sin x \cos x$ حيث $x \in [0\,,2\pi]$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$h(x) = \sin x \cos x - \sin x \Rightarrow \sin x\,(\cos x - 1) = 0$$

$$either \ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0\,,2\pi] \qquad x = \pi \in [0\,,2\pi] \qquad x = 2\pi \in [0\,,2\pi]$$

$$or \ \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \in [0\,,2\pi] \qquad x = 2\pi \in [0\,,2\pi]$$

$$A = |\int_0^{\pi} (\sin x \cos x - \sin x)dx| + |\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x \cos x - \sin x)dx|$$

$$A = |[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x]_0^{\pi}| + |[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x]_{\pi}^{2\pi}|$$

$$A = \left|\left[\frac{\sin^2(\pi)}{2} + \cos(\pi)\right] - \left[\frac{\sin^2(0)}{2} + \cos(0)\right]\right| + \left|\left[\frac{\sin^2(2\pi)}{2} + \cos(2\pi)\right] - \left[\frac{\sin^2(\pi)}{2} + \cos(\pi)\right]\right|$$

$$A = |[(0-1)-(0+1)]| + |[(0+1)-(0-1)]| = |-1-1| + |1+1| = |-2| + 2 = 4$$

9) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = 2\sin x + 1$ ، $g(x) = \sin x$ حيث $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقط التقاطع

$$\sin x + 1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)dx\right| = \left|[-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\left(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) - (-\cos(0) + 0)\right| = \left|\left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-1)\right| = \left|\frac{3\pi}{2} + 1\right| = \frac{3\pi}{2} + 1$$

10) جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات .

الحل : نجعل $y = 0$ لإيجاد نقط التقاطع

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$x(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \quad \boxed{x=-1} \quad \boxed{x=-3}$$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right] - \left[\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}\right]\right| + \left|(0) - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right]\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{3 - 16 + 18 - 243 + 432 - 162}{12}\right] - \left[\frac{-3 + 16 - 18}{12}\right]\right|$$

$A = \frac{32}{12} + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}$ وحدة مساحة

11) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (3t^2 - 6t + 3)m/s$ إحسب

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2, 4]$ b) الإزاحة في الفترة $[0, 5]$ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

$$3t^2 - 6t + 3 = 0 \quad] \div 3$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \notin [2, 4]$$

a) $d = \left| \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt \right| = \left| [\, t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4 \right|$

$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |28 - 2| = 26\, m$

b) $s = \left| \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)dt \right| = \left| [\, t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5 \right| = (125 - 75 + 15) - (0) = 65\, m$

12) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$ إحسب :

(a) السرعة عندما $t = 2$ (b) المسافة خلال الفترة $[1 , 2]$ (c) الازاحة بعد 10 ثواني من بدء الحركة

الحل :

a) $V(t) = \int a\,(t)dt = \int (4t + 12)dt = 2t^2 + 12t + c$

$90 = 2(16) + 12\,(4) + c \Rightarrow 90 = 32 + 48 + c \Rightarrow c = 90 - 80 \Rightarrow c = 10$

$V(t) = 2t^2 + 12t + 10 \Rightarrow V(2) = 2(4) + 12\,(2) + 10 = 8 + 24 + 10 = 42\, m/s$

b) $d = \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)dt = \left| \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t \right]_1^2 \right| = \left| \left(\frac{16}{3} + 24 + 20 \right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10 \right) \right|$

$d = \left| \frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16 \right| = \left| \frac{14}{3} + 28 \right| = \frac{14 + 84}{3} = \frac{96}{3}\, m$

c) $s = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)dt = \left| \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t \right]_0^{10} \right| = \left| \left(\frac{2000}{3} + 600 + 100 \right) - (0) \right|$

$s = \frac{2000 + 1800 + 300}{3} = \frac{4100}{3} m$

13) تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100\, t - 6t^2) m/s$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول الذي بدأت منه ثم إحسب التعجيل عندها . وزاري ٢٠١٤ / د٢

الحل :

$V(t) = 100\, t - 6t^2$ تكامل الطرفين

$s = \int (100\, t - 6t^2)\, dt \Rightarrow s = 50t^2 - 2t^3 + c$

∵ النقطة تتحرك من السكون ∴ $s = 0 \ ,\ t = 0$

$0 = 50t^2 - 2t^3 + c \Rightarrow c = 0$

$\therefore\ s = 50t^2 - 2t^3$

عند عودة النقطة الى موضعها الأول يعني ان الازاحة (s) تساوي صفر لذا يكون :

$50t^2 - 2t^3 = 0 \Rightarrow t^2(50 - 2t) = 0$

$either \quad t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

$or \quad 50 - 2t = 0 \Rightarrow 2t = 50 \Rightarrow t = 25 \ sec$ الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول

$a(t) = \acute{V}(t)$ التعجيل

$a(t) = 100 - 12\,t$

$a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200\, m/s^2$

الحجوم الدورانية

١- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $a = x$ الى $b = x$ حول محور السينات نطبق العلاقة $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

٢- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y = a$ الى b حول محور الصادات نطبق العلاقة $V = \pi \int_a^b x^2\, dy$

مثال : المنطقة المحددة بين المنحني $\sqrt{x} = y, 0 \le x \le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها .

الحل :

$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^4 x\, dx = [\pi \frac{x^2}{2}]_0^4 = 8\pi - 0\pi = 8\pi$ وحدة مكعبة

مثال : المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات جد حجمها .

الحل :

$V = \pi \int_1^4 x^2\, dy = \pi \int_1^4 (\frac{1}{\sqrt{y}})^2\, dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy = \pi\, [ln\, y]_1^4 = \pi\, [ln\, 4 - ln 1] = 2\pi ln 2$ وحدة مكعبة

مثال : جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول محور الصادات دورة كاملة .

الحل : نجد التقاطع مع y بوضع $x = 0$

$y = 0 + 1 \Rightarrow y = 1 \quad , \quad [1, 4]$

$$V = \pi \int_1^4 x^2\, dy$$

$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

$V = \pi \int_1^4 (y - 1)\, dy = \pi [\frac{y^2}{2} - y]_1^4 = \pi \left[\frac{16}{2} - 4\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{9}{2}\pi\, unit^3$

مثال : اوجد حجم الشكل الناتج من دوران القطع المكافئ $x = 2\,y^2$ ومحور الصادات ضمن الفترة $y = 2, y = 0$

الحل :

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_0^2 x^2\; dy \qquad , \qquad x = 2y^2 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 = 4y^4$$

$$V = \pi \int_0^2 4y^4\, dy = 4\pi[\frac{y^5}{5}]_0^2 = 4\pi\left[\frac{2^5}{5} - \frac{0}{5}\right] = 4\pi\left[\frac{32}{5}\right] = \frac{128\pi}{5}\, unit^3$$

مثال : اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 2 , x = 0$ حول المحور السيني .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^2 8x\, dx = 4\pi[x^2]_0^2 = 4\pi[4 - 0] = 16\pi\, unit^3$$

مثال : اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0 , x = 5$ حول المحور السيني .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^5 (2x^2)^2\, dx = 4\pi \int_0^5 x^4\, dx = 4\pi[\frac{x^5}{5}]_0^5$$

$$V = \frac{4\pi}{5}[x^5]_0^5 = \frac{4\pi}{5}[5^5 - 0^5] = \frac{4\pi}{5}[3125 - 0] = 2500\pi \qquad \text{وحدة مكعبة}$$

مثال : اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16 , y = 0$ حول المحور الصادي .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b x^2\; dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4}\, dy = \frac{\pi}{4}[y^2]_0^{16} = \pi\left[\frac{16^2}{8} - 0\right] = 32\pi \quad \text{وحدة مكعبة}$$

مثال : اوجد حجم المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 2 , y = 1$ ومحور الصادات دورة كاملة حول المحور الصادي .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b x^2\; dy \qquad\qquad x = \frac{1}{y} \xrightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy = \pi[\frac{-1}{y}]_1^2 = \pi\left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{\pi}{2} \quad \text{وحدة مكعبة}$$

حل تمارين (7 – 4)

س1 : أوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1 , x = 2$ حول المحور السيني .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_1^2 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_1^2 x^4 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right] = \frac{31}{5}\pi$$

س2 : أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي . وزاري ٢٠١٣ / د١

الحل :

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\because y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy = \pi \int_1^4 (y-1) \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^4 = \pi \left[(8-4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi \left[4 + \frac{1}{2}\right] = 4\frac{1}{2}\pi$$

س3 : إحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي .

الحل :

$$y^2 + x = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2$$

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$ حدود التكامل

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy = \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2)^2 \, dy = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) \, dy$$

$$V = \pi \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^1 = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \pi \left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right]$$

$$V = \frac{30-20+6}{15}\pi = \frac{16}{15}\pi$$ وحدة مكعبة

س4 : أحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0 , \; x = 2$ حول المحور السيني . وزاري ٢٠١٤ / د٢

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_0^2 x^3 \, dx = \pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \pi \left[\frac{16}{4} - 0\right] = 4\pi$$ وحدة مكعبة

حلول الاسئلة الوزارية حول التكامل

وزاري / 1996/ د1 ؛ جد ناتج

$$1)\ \int (\sin x - 3\sec^2 x)dx = -\cos x - 3\tan x + c$$

$$2)\ \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = \int_0^3 (1+x)^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

$$= \left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2(2^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(1)^{\frac{1}{2}}\right] = 4 - 2 = 2$$

$$3)\ \int \cos 6x \cos 3x\, dx = \int (1 - 2\sin^2 3x)\cos 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos 3x\,(3)\,dx - 2\int \sin^2 3x \cos 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^3 3x}{3} + c = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + c$$

وزاري / 1996 / د2 ؛ جد ناتج

$$\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \sin^2 x)dx = \int \sec^2 x\, dx - \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)dx$$

$$= \tan x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

وزاري / 1997 / د1 ؛ جد ناتج ؛

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2 - 15}\, dx = \int_4^8 x(x^2 - 15)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_4^8 2x(x^2 - 15)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-15)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^8 = \left[\frac{1}{3}\cdot(x^2 - 15)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$= \left[\frac{1}{3}(64 - 15)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{1}{3}(49)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{1}{3}(7^2)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = \frac{342}{3} = 114$$

وزاري / 1997 / د1 ؛ جد ناتج ؛

$$\int \cos 2x \sin^2 x\, dx = \int \cos 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$$

وزاري / 1997 / د2 : جد ناتج :

$$\int(1+\cos 3x)^2\,dx=\int(1+2\cos 3x+\cos^2 3x)dx$$

$$=\int dx+2\int \cos 3x\,dx+\frac{1}{2}\int (x+\sin 6x)\,dx$$

$$=x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+c=\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{12}\sin 6x+c$$

وزاري / 1998 / د1 : جد ناتج :

$$\int(\cos x-\sin 2x)^2\,dx=\int(\cos^2 x-2\cos x\sin 2x+\sin^2 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx-2\int \cos x\,.(2\sin x\cos x)dx+\frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+4\,.\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}\cos^3 x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+c$$

$$=x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}\cos^3 x-\frac{1}{8}\sin 4x+c$$

وزاري / 1998 / د1 : س : اذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)dx=\frac{-9}{4}$ ما قيمة $a\in R^+$ ؟

الحل :

$$\int_{-1}^{a}(x-x^3)dx=\frac{-9}{4}\Rightarrow\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{a}=\frac{-9}{4}\Rightarrow\left[\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=\frac{-9}{4}$$

$$\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-9}{4}\Rightarrow\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-9}{4}\overset{\times 4}{\Rightarrow}2a^2-a^4-1=-9$$

$$-a^4+2a^2-1+9=0\Rightarrow -a^4+2a^2+8=0\Rightarrow a^4-2a^2-8=0$$

$(a^2-4)(a^2+2)=0\Rightarrow(a^2-4)=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2\quad,\quad(a^2+2)=0$ يهمل

وزاري / 1998 / د 2 : س : اذا كان $\int_{a}^{b}(2x+3)dx=12$ وكان $a+2b=3$ ما قيمة $a,b\in R$ ؟

الحل :

$$a=3-2b\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\int_{a}^{b}(2x+3)dx=12\Rightarrow[x^2+3x]_{a}^{b}=12\Rightarrow[b^2+3b]-[a^2+3a]=12$$

$$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b)=12$$

$$b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9+6b-12=0$$

$$b^2+3b-9+12b-4b^2-9+6b-12=0$$

$[-3b^2+21b-30=0\,]\div -3 \Rightarrow b^2-7b+10=0$

$(b-5)(b-2)=0$

$either\ \ b-2=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=3-2\,(2)=-1$

$or\qquad b-5=0 \Rightarrow b=5 \Rightarrow a=3-2\,(5)=-7$

وزاري / 2000 / د2 : س : جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f\,(x)=1-2\,sin^2x$ ومحور السينات وعلى $[0\,,\frac{\pi}{2}]$.

الحل :

$1-2\sin^2x=0 \Rightarrow cos\,2x=0 \Rightarrow [2x=\frac{\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}]\div 2 \quad x=\frac{\pi}{4}\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \frac{3\pi}{4}\notin[0\,,\frac{\pi}{2}]$

الفترات $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right]$

$$A=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos2x\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}cos2x\,dx\right|=\left|[\frac{1}{2}\,sin2x\,]_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|[\frac{1}{2}\,sin2x\,]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$=|[\frac{1}{2}\,sin\frac{\pi}{2}]|-|[\frac{1}{2}\,sin0]|+|[\frac{1}{2}\,sin\pi]|-|[\frac{1}{2}\,sin\frac{\pi}{2}]|$$

$$=\left|\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)\right|+\left|\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{2}(1)\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\,unit^2$$

وزاري / 2001 / د1: جد ناتج :

$$\int sin^2x\,cos^2x\,dx=\int[sinx\ \,cosx]^2\,dx=\int\left[\frac{1}{2}(2sinx\,cosx)\right]^2dx=\int[\frac{1}{2}sin\,2x]^2\,dx$$

$$=\int\frac{1}{4}sin^2 2x\,dx\ =\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\int(1-cos4x)dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}sin\,4x\right)+c$$

$$=\frac{1}{8}\,x-\frac{1}{32}sin\,4x+c$$

وزاري / 2001 / د 2 : جد ناتج :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{9-12x+4x^2}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(3-2x)^2}=\int_{-1}^{1}(3-2x)^{-2}\ dx=\frac{-1}{2}\int_{-1}^{1}(3-2x)^{-2}.(-2)dx$$

$$=\left[\frac{-1}{2}\,.\frac{(3-2x)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{2(3-2x)}\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{2(1)}\right]-\left[\frac{1}{2\,(5)}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{5-1}{10}=\frac{2}{5}$$

وزاري / 2001 / د 1 : س : جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=x^3-9x$ ومحور السينات والفترة $[-3\,,3]$ ؟

الحل :

$x^3-9x=0 \Rightarrow x\,(x^2-9)=0 \Rightarrow either\ \ x=0\ \ or\ x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$

$x=\pm3\ \in[-3\,,3]$

$$A=|\int_{-3}^{0}(x^3-9x)\,dx|\ +|\int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx\,|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|\frac{-81}{4} + \frac{81}{2}\right| + \left|\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right| = \left|\frac{-81+162}{4}\right| + \left|\frac{81-162}{4}\right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{162}{4} = 40\frac{1}{2}unit^2$$

وزاري / 2001 / د 1 : س : جد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)dx$

الحل :

$$= \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)dx = \left[\frac{(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(16+20)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{2}{3}(6^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(216) = \frac{432}{3} = 144$$

وزاري / 2002 / د1 : س : جد المساحة المحددة للمنحني الدالتين $y = 3x^2$ ، $y = x^4 - 4$

الحل :

$$x^4 - 4 = 3x^2 \Rightarrow h(x) = x^4 - 3x^2 - 4 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2-4)(x^2+1) = 0 \Rightarrow (x^2-4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$A = \left|\int_{-2}^{2}(x^4 - 3x^2 - 4)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] - \left[\frac{-32}{5} + 8 + 8\right]\right| = \left|\frac{64}{5} - 32\right| = \frac{96}{5}unit^2$$

وزاري / 2002 / د1 : س : جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^2$ ، $y = 2x$ وعلى $[1,3]$

الحل :

$$h(x) = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \notin [1,3] \quad or \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\therefore A = \left|\int_1^2 (x^2-2x)\,dx\right| + \left|\int_2^3 (x^2-2x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3\right|$$

$$= \left|\left[\frac{8}{3} - 4\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right]\right| + \left|[9-9] - \left[\frac{8}{3} - 4\right]\right|$$

$$= \left|\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right| + \left|-\frac{8}{3} + 4\right| = \left|\frac{7}{3} - 3\right| + \left|\frac{-8+12}{3}\right| = \left|\frac{7-9}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2\ unit^2$$

وزاري / 2004 / د1 : س : اذا كان $\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$ جد قيمة h .

الحل :

$$\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2 \Rightarrow \int_h^4 x\,(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}\,dx = 2$$

$$\frac{1}{2}\int_h^4 2x\,(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}\,dx = 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_h^4 = 2$$

$[(16+9)^{\frac{1}{2}}]-[(h^2+9)^{\frac{1}{2}}]=2 \Rightarrow (5^2)^{\frac{1}{2}}-(h^2+9)^{\frac{1}{2}}=2$

$(h^2+9)^{\frac{1}{2}}=5-2 \Rightarrow (h^2+9)^{\frac{1}{2}}=3 \Rightarrow$ بالتربيع

$h^2+9=9 \Rightarrow h^2=0 \Rightarrow \therefore h=0$

وزاري / 2006 / د1 : جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2}$

الحل :

$$\int_1^2 (5-2x)^{-2}\,dx=\frac{-1}{2}\int_1^2 (5-2x)^{-2}(-2)dx=[\frac{-1}{2}.\frac{(5-2x)^{-1}}{-1}]_1^2$$

$$=[\frac{1}{2(5-2x)}]_1^2=\left[\frac{1}{2(5-4)}\right]-\left[\frac{1}{2(5-2)}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3-1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

وزاري / 2006 / د2 : جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$

الحل :

$$=\int_1^2 (3x-4)^{-2}\,dx=\frac{1}{3}\int_1^2 (3x-4)^{-2}\,3\,dx=[\frac{1}{3}.\frac{(3x-4)^{-1}}{-1}]_1^2$$

$$=[\frac{-1}{3(3x-4)}]_1^2=\left[\frac{-1}{3(6-4)}\right]-\left[\frac{-1}{3(3-4)}\right]=\frac{-1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$

وزاري / 2008 / د1 : س : اذا كان $\int_a^b f(x)\,dx=5$ ، $\int_c^b f(x)\,dx=3$ وكانت $c\in[a\,,b]$

جد قيمة $\int_a^c f(x)\,dx$

الحل :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \Rightarrow 5=\int_a^c f(x)\,dx+3$$

$$\therefore \int_a^c f(x)\,dx=5-3 \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx=2$$

وزاري / 2008 / د1 : جد $\int \cos^2 2x \sin x\,dx$

الحل :

$$=\int (2\cos^2 x-1)^2 \sin x\,dx=\int (4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)\sin x\,dx$$

$$=-4\int \cos^4 x(-\sin x)dx+4\int \cos^2 x.(-\sin x)dx+\int \sin x\,dx$$

$$=-4\frac{\cos^5 x}{5}+4.\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c=\frac{-4}{5}\cos^5 x+\frac{4}{3}\cos^3 x-\cos x+c$$

وزاري / 2009 / د1 : س : جسم يتحرك بسرعة $v(t)=3t^2-12t+9$ في اي زمن t احسب :

1) المسافة المقطوعة خلال الفترة $[0\,,2]$ 2) الزمن الذي يصبح فيه التعجيل $18\ m\backslash min^2$

الحل :

1. $[3t^2-12t+9=0]\div 3 \Rightarrow t^2-4t+3=0$

$(t-3)(t-1)=0$

$either\ \ t-3=0 \Rightarrow t=3 \notin [0,2]$

$or\ \ \ t-1=0 \Rightarrow t=1 \in [0,2]$

$\therefore d = |\int_0^1 (3t^2-12t+9)dt| + |\int_1^2 (3t^2-12t+9)dt|$

$= |[t^3-6t^2+9t]_0^1| + |[t^3-6t^2+9t]_1^2|$

$= |[1-6+9]-[0]| + |[8-24+18]-[1-6+9]|$

$= |4| + |2-4| = 4+2 = 6\,m$

2. $a(t) = V'(t) = 6t-12$

$18 = 6t-12 \Rightarrow 6t = 18+12 \Rightarrow 6t = 30 \Rightarrow t = 5\,min$

وزاري / 2009 / د2 : جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$

$$= \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}\,dx = \int_3^8 \frac{x}{x\,(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= [\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_3^8 = \left[2\,(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = \left[2(8+1)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(3+1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \left[2\,(3^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(2^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 6-4 = 2$$

وزاري / 2009 / د2 : جد المساحة المحددة بين المنحنيين : $y = cos^2x$ ، $y = sin^2x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

الحل :

$h(x) = cos^2x - sin^2x \Rightarrow h(x) = cos2x$

$cos2x = 0 \Rightarrow [2x = \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}] \div 2 \Rightarrow \therefore x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]\ ,\ \frac{3\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$\therefore A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\,2x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos\,2x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}sin\,2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{2}sin\,2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{2}sin\,\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}sin\,0\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{2}sin\,\pi\right] - \left[\frac{1}{2}sin\,\frac{\pi}{2}\right]\right|$

$= \left|\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مربعة

وزاري / 2010 / د1 : س : جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث سرعته $v = 3t^2 + 4t + 7$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها علما ان المسافة تقاس بالامتار .

الحل :

$3t^2 + 4t + 7 > 0$

$d = \int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)dt$

$$a(t) = V'(t) = 6t + 4 \Rightarrow a(4) = 6(4) + 4 = 28 \frac{m}{s^2}$$

وزاري / 2012 / د1 : س : جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = (x-1)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 3]$

الحل :

$$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [-1, 3]$$

$$A = \left|\int_{-1}^{1} (x-1)^3\, dx\right| + \left|\int_{1}^{3} (x-1)^3 dx\right|$$

$$= \left|\left[0 - \frac{(-2)^4}{4}\right]\right| + \left|\left[\frac{2^4}{4} - 0\right]\right| = |-4| + |4| = 8$$ وحدة مساحة

وزاري / 2012 / د1 : س : جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 1$ ، $y = 2$ حول المحور الصادي .

الحل :

$$v = \pi \int_a^b x^2\, dy \Rightarrow \pi \int_1^2 (y-1)\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{4}{2} - 2\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right] = \pi(2-2) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$ وحدة مكعبة

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الرابع

س13/ جد تكاملات كل مما يأتي :

a) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$$ نحلل فرق بين مربعين

$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x}$ $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 2x \,.\, (2)\, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

b) $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\, dx$

$$= \int (\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \cos^2 2x - 2)\, dx$$ نوزع ونرتب

$$= \int \left[(\cos 2x)^2 \sin 2x + 2 \sin 2x - \cos^2 2x - 2\right] dx$$

$\boxed{-2 \sin 2x = \text{المشتقة}}$ $\boxed{\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)}$

$$= \int \left[-\frac{1}{2}(\cos 2x)^2 \,.\, (-2 \sin 2x) + 2 \sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - 2\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(\cos 2x)^3}{3} - 2\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) - 2x + c$$

$$= -\frac{(cos2x)^3}{6} - cos\,2x - \frac{1}{2}x + \frac{sin\,4x}{8} - 2x + c$$

$$= -\frac{(cos2x)^3}{6} - cos\,2x - \frac{5}{2}x + \frac{sin\,4x}{8} + c$$

c) $\int \frac{ln\,(x)}{x}\,dx = \int \underbrace{ln\,x}\,.\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(ln(x))^2}{2} + c$

d) $\int \frac{2\,sin\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ ∵ sin بدون اس فيمكن ان تكامل مباشرة ولكن علينا ان نرتب

$$= 2\int \frac{sin\,x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = 2\int sin\,x^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

مشتقة الزاوية $= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$$= 3\,.\,2\int sin\,x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = 6\left(-\,sin\,x^{\frac{1}{3}}\right) + c = -6\,sin\,\sqrt[3]{x} + c$$

e) $\int cot\,x\,csc^3x\,dx$

$$= \int (cscx)^3\,cot\,x\,dx$$

علينا ان نفكك $(cscx)^3$

المشتقة $= -\,csc\,x\,.\,cot\,x$

$$= -\int (cscx)^2\,(-\,csc\,x\,.\,cot\,x)dx = -\frac{(cscx)^3}{3} + c$$

f) $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\,dx$

$$= \int \sqrt[3]{x^3(3 - 5x^2)}\,dx$$

$$= \int x\,\sqrt[3]{(3 - 5x^2)}\,dx$$

$$= \int (3 - 5x^2)^{\frac{1}{3}}x\,dx = -\frac{1}{10}\int (3 - 5x^2)^{\frac{1}{3}}\,(-10x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{10}\,\frac{(3 - 5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{40}\,(3 - 5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$

g) $\int \frac{1}{x^2 - 14\,x + 49}\,dx$ نحلل المقام مربع كامل

$$\int \frac{1}{(x-7)^2}\,dx = \int (x-7)^{-2} = \frac{(x-7)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{-\,(x-7)} + c$$

h) $\int sec^2 3x\,.\,e^{tan\,3x}\,dx = \int e^{tan\,3x}\,.\,sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\int e^{tan\,3x}\,.\,(3sec^2 3x)\,dx$

$$= \frac{1}{3}\,e^{tan\,3x} + c$$

تذكير ببعض قوانين الدوال المثلثية

$sin^2x + cos^2x = 1$	$cos^2x = 1 - sin^2x$	$sin^2x = 1 - cos^2x$
$cos\ 2x = cos^2x - sin^2x$	$cos\ 2x = (1 - sin^2x) - sin^2x$ $cos\ 2x = (1 - 2sin^2x)$	$2sin^2x = 1 - cos2x$
$cos\ 2x = (1 - cos^2x) - cos^2x$ $cos\ 2x = (1 - 2cos^2x)$	$2cos^2x = 1 + cos2x$	$cos2x = 2cos^2x - 1$
$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$	$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$	$sinx\ cosx = \frac{1}{2}\ sin\ 2x$
$Sin2x = 2sinx\ cosx$	$sec^2x = tan^2x + 1$	$csc^2x = cot^2x + 1$
$tan\ x = \frac{sin\ x}{cosx}$	$cot\ x = \frac{cos\ x}{sin\ x}$	$csc\ x = \frac{1}{sin\ x}$, $sec\ x = \frac{1}{cosx}$

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية



المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية : هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة او اكثر للدالة المجهولة في المعادلة (اي للمتغير التابع في المعادلة)

ملاحظة : ان المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغيرين (المتغير الأول متغير مستقل وليكن (x) ودالة غير معرفة ولتكن مثلا (y) وبعض مشتقات الدالة (y) بالنسبة للمتغير (x)) مثلا

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$$

$$x^2\, y'' + 5xy' - x^3 y = 0$$

$$y' + x^2 y + x = y$$

$$y^4 + \cos y + x^2\, y\, y' = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$$

معادلات تفاضلية إعتيادية لأن المتغير (y) يعتمد فقط على المتغير (x) $\quad (y'')^2 + 2y' + x^2\ \ln x = 5$

درجة المعادلة التفاضلية : وهي اكبر قوة (أس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية .

رتبة المعادلة التفاضلية : وهي رتبة أعلى مشتقة موجودة في المعادلة التفاضلية .

$\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3x\,y + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

$(y''')^3 + y' - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة اولى

$y'' + 2y\,(y')^3 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

$(\frac{dy}{dx})^4 = x^3 - 5$ من الرتبة الاولى والدرجة الرابعة

$x^2(\frac{dy}{dx})^4 + (\frac{d^3y}{dx3})^2 + 2\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

$y^{(4)} + \cos y + x^2\, yy' = 0$ من الرتبة الرابعة والدرجة الاولى

ملاحظة : درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى مرتبة تظهر في المعادلة $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')2}$ من الرتبة الثانية لأن اعلى مشتقة فيها y'' حيث يمكن ازالة الاسس الكسرية والجذور ونحصل $(y'')^4 = 1 + (y')^2$ بذلك تكون درجة المعادلة الرابعة .

حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو اية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة خالية من المشتقة ومعرفة على فترة معينة وتحقق المعادلة التفاضلية ، اي دالة مجهولة بدلالة متغير مستقل تحقق المعادلة التفاضلية .

مثال : بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة $xy' = x^2 + y$

الحل :

$$y = x^2 + 3x \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y' = 2x + 3 \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$LHS = xy' = x(2x+3) = 2x^2 + 3x$$

$$RHS = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3$$

∴ العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية اعلاه

الحل الخاص والحل العام للمعادلة التفاضلية

ان اصل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو علاقة بين y, x تحقق المعادلة ان الحل العام لأي معادلة تفاضلية هو حل يشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوي لرتبة المعادلة ، فاذا كانت المعادلة من الرتبة الاولى وجب ان يكون حلها مشتملاً على ثابت اختياري واحد (وهو ثابت التكامل) الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الاولى ، اما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب ان يكون حلها مشتملا على (ثابتي التكامل) نظرا لأجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا بالنسبة للمعادلات التي لها رتبة أعلى .

مثال : اثبت ان $y = x\,lnx - x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \;,\; x > 0$

الحل :

$$y = xlnx - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + ln\,x(1) - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ln\,x$$

$$L.H.S = x\frac{dy}{dx} = xln\,x$$

$$R.H.S = x + y = x + (x\,ln\,x - x) = x\,lnx \qquad L.H.S = R.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة هي احد حلول المعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : بين $lny^2 = x + a \;,\; a \in R$ حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$

الحل :

$$lny^2 = x + a \Rightarrow 2\,lny = x + a \Rightarrow 2\left(\frac{y'}{y}\right) = 1 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه $lny^2 = x + a$

مثال : هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل :

$$y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه $y = x^3 + x - 2$

مثال : هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$ ؟

الحل :

$$y^2 = 3x^2 + x^3 \Rightarrow 2yy' = 6x + 3x^2 \Rightarrow [2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x] \div 2$$

$$y(y'') + (y')^2 = 3 + 3x = L.H.S \Rightarrow y(y'') + (y')^2 - 3x = 3 \neq R.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة ليست حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : برهن ان $y = 3cos\,2x + 2sin\,2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

الحل :

$$y = 3cos2x + 2sin\,2x \,\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y' = -3sin2x\,(2) + 2\,cos2x\,(2) = -6sin2x + 4\,cos2x$$

$$y'' = -12cos2x - 8sin2x \,\ldots\ldots\ldots(2)$$

بتعويض (1) و (2) في الطرف الايسر للمعادلة

$$L.H.S = (-12\,cos\,2x - 8\,sin2x) + 4\,(3cos2x + 2sin\,2x)$$

$$= -12cos2x - 8sin2x + 12\,cos2x + 8sin\,2x = 0 = R.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

الحل :

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x} \Rightarrow y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$L.H.S = y'' + y' - 6y = (4e^{2x} + 9e^{-3x}) + (2e^{2x} - 3e^{-3x}) - 6(e^{2x} + e^{-3x})$$

$$= 4\,e^{2x} + 9\,e^{-3x} + 2\,e^{2x} - 3\,e^{2x} - 6\,e^{2x} - 6\,e^{-3x} = 0 = R.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : هل ان المعادلة $y = 3e^{-2x}$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' = 2y$

الحل :

$$y = 3e^{-2x}$$

$y' = 3e^{-2x}(-2) = -6e^{-2x}$ نجد المشتقة الاولى

$y'' = 12e^{-2x}$ نجد المشتقة الثانية

$L.H.S = y'' + y' = 12e^{-2x} + (-6e^{-2x}) = 6e^{-2x}$

$R.H.S = 2y = 2(3e^{-2x}) = 6e^{-2x}$ $\quad L.H.S = R.H.S$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : هل العلاقة $y = cos^2x - sin^2x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$ ؟

الحل :

لدينا $cos2x = cos^2x - sin^2x$

$y = cos2x \Rightarrow y' = -2\sin 2x \Rightarrow y'' = -2(cos2x\,(2)) = -4\,cos2x$

$L.H.S. = y'' + 4y = -4\,cos2x + 4\,cos2x = 0$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س : واجب : هل ان المعادلة $xy = cos2x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية

$xy'' + 2y' = -4xy$

س : واجب : هل ان المعادلة $y^2 = x^4 + x^3 + x^2$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية

$yy'' + (y')^2 = 6x^2 + 3x + 1$

حل تمارين (1 – 5)

س1 : بين درجة ورتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية :

$1 - (x^2 - y^2) + 3xy\,\frac{dy}{dx} = 0$ درجة اولى رتبة أولى

$2 - \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 7$ درجة اولى رتبة ثانية

$3 - (y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + cos\,x$ درجة ثالثة رتبة ثالث

$4 - (\frac{d^3y}{dx^3})^2 - 2\,(\frac{dy}{dx})^5 + 3y = 0$ درجة ثانية رتبة ثانية

س2 : برهن ان $y = sinx$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$

الحل :

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$

$L.H.S = y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 = R.H.S$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س3 : برهن أن العلاقة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

الحل :

$$s = 8\cos(3t) + 6\sin(3t)$$

$$\frac{ds}{dt} = 8(-\sin 3t).3 + 6(\cos 3t).3 = -24\sin 3t + 18\cos 3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -24\cos(3t).3 + 18(-\sin 3t).(3) = -72\cos 3t - 54\sin 3t$$

$$L.H.S = \frac{d^2s}{dt^2} + 9s = -72\cos 3t - 54\sin 3t + 9(8\cos 3t + 6\sin 3t)$$

$$L.H.S = -72\cos 3t - 54\cos 3t + 72\cos 3t + 54\sin 3t = 0 = R.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه

س4 : هل $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$ ؟

الحل :

$$y = x + 2 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$$

$$L.H.S = y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + x + 2 = 3 + x + 2 = x + 5 \neq x$$

∴ العلاقة المعطاة $y = x + 2$ ليست حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه $L.H.S \neq R.H.S$

س5 : هل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$ ؟

الحل :

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x \Rightarrow y'' = 2\sec x(\sec x \tan x) = 2\sec^2 x.\tan x$$

$$R.H.S = 2y(1 + y^2) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) = 2\tan x \sec^2 x = L.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة $y = \tan x$ ليست حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه

س 6 : هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة $y^3 y'' = -2$ ؟

الحل :

$$2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 4x + 2y\,y' = 0 \Rightarrow 2y\,y' = -4x \overset{\div 2}{\Rightarrow} y\,y' = -2x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y}$$

$$y'' = \frac{y(-2) - (-2x)y'}{y^2} = \frac{-2y + 2x(\frac{-2x}{y})}{y^2} = \frac{-2y - (\frac{4x^2}{y})}{y^2} = \frac{\frac{-2y^2 - 4x^2}{y}}{y^2}$$

$$y'' = \frac{-2y^2 - 4x^2}{y^3} = \frac{-2(y^2 + 2x^2)}{y^3} = \frac{-2(1)}{y^3} = \frac{-2}{y^3} \Rightarrow y'' = \frac{-2}{y^3}$$

$$R.H.S = y^3 y'' = y^3 \left(\frac{-2}{y^3}\right) = -2 = L.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة $(2x^2 + y^2 = 1)$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية اعلاه

س7 : هل $yx = sin5x$ حلاً للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$ ؟

الحل :

$$yx = \sin 5x \Rightarrow y + xy' = 5\cos 5x \Rightarrow y' + xy'' + y' = -25\sin 5x$$

$$xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0 \Rightarrow xy'' + 2y' + 25yx = 0$$

∴ العلاقة المعطاة $yx = sin\,5x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه

س8 : بين أن $y = ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in R$

الحل : (وزاري ٢٠١٢ / د٣ – ٢٠١٣/د١)

$$y = ae^{-x} \Rightarrow y' = ae^{-x}.(-1) = -ae^{-x}$$

$$L.H.S = y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = R.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة $y = ae^{-x}$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه

س9 : بين ان $c \in R$, $ln|y| = x^2 + c$ هو حلاً للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$

الحل : (وزاري ٢٠١٥ /د٢)

$$lny = x^2 + c \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x \Rightarrow y' = 2xy \Rightarrow y'' = 2x(y') + 2y$$

$$R.H.S = y'' = 2xy' + 2y = 2x(2xy) + 2y = 4x^2y + 2y = L.H.S$$

∴ العلاقة المعطاة $lny = x^2 + c$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية أعلاه

حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولا : المعادلات التي تنفصل متغيراتها

في هذا النوع من المعادلات نستطيع أن نعزل كل الحدود التي تحتوي على (x) مع (dx) في طرف والحدود التي تحتوي على (y) مع (dy) في الطرف الآخر فنحصل على $g(y)dy = f(x)dx$ ثم تكامل الطرفين فنحصل على : $\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$ حيث يمثل (c) ثابت التكامل .

مثال : حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \Rightarrow dy = (2x+5)dx$$

$$\int dy = \int (2x+5)dx \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$$

مثال : حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y} \Rightarrow y\,dy = (x-1)dx$$

$$\int y\,dy = \int (x-1)dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 2c} \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + c_1} \quad (\text{حيث } c_1 = 2c)$$

مثال : حل المعادلة $dy = \sin x \cos^2 y\, dx$ حيث $(\cos y \neq 0)$, $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

الحل : نجعل المعادلة $g(y)dy = f(x)dx$

$$dy = \sin x \cos^2 y\, dx \overset{(\div \cos^2 y)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\, dx$$

$$\sec^2 y\, dy = \sin x\, dx$$

$$\int \sec^2 y\, dy = \int \sin x\, dx \Rightarrow \tan y = -\cos x + c$$

مثال : حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ عندما $x = 0 , y = 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \Rightarrow dy = e^{2x}e^{y}\, dx \overset{(\div e^{y})}{\Longrightarrow} \frac{dy}{e^{y}} = e^{2x}\, dx \Rightarrow e^{-y}dy = e^{2x}\, dx$$

$$\int e^{-y}dy = \int e^{2x}\, dx \Rightarrow -\int e^{-y}(-1)\, d = \frac{1}{2}\int e^{2x}(2)dx$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$ وبالتعويض $x = 0 \;, y = 0$

$$-e^{0} = \frac{1}{2}e^{2(0)} + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \Rightarrow -e^{-y} = \frac{1}{2}(e^{2x} - 3)$$

$$\frac{-1}{e^{y}} = \frac{e^{2x} - 3}{2} \Rightarrow e^{y}(e^{2x} - 3) = -2 \Rightarrow e^{y} = \frac{-2}{e^{2x} - 3}$$

$$\ln e^{y} = \ln\left|\frac{-2}{e^{2x} - 3}\right| \Rightarrow y = \ln\left|\frac{-2}{e^{2x} - 3}\right|$$

مثال : جد حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = sin^2 x \ sin^2 y$

الحل :

$$\frac{dy}{sin^2 y} = sin^2 x\, dx \Rightarrow csc^2 y\, dy = sin^2 x\, dx$$ بأخذ التكامل للطرفين

$$\int csc^2 y\, dy = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\ dx \quad , \quad sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$-cot\, y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right) + c \overset{\times -1}{\Longrightarrow} cot\, y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right) - c$$

$$cot\, y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right) + c_1 \qquad (\text{حيث } c_1 = -c)$$

مثال : جد حلاً للمعادلة $\frac{dy}{dx} = 5^{2x+y}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 5^{2x} . 5^{y} \Rightarrow \frac{dy}{5^y} = 5^{2x}\, dx \Rightarrow 5^{-y}\, dy = 5^{2x}\, dx$$ بأخذ التكامل للطرفين

$$\int 5^{-y}\, dy = \int 5^{2x}\, dx \Rightarrow -\frac{1}{ln\,5}\int 5^{-y}(-ln5)\, dy = \frac{1}{2ln5}\int 5^{2x}(2ln5)dx$$

$$\left[\frac{-1}{ln5} . 5^{-y} = \frac{1}{2ln5}5^{2x} + c\right] \quad ln\,5$$ بالضرب بـ

$$-5^{-y} = \frac{1}{2}5^{2x} + cln5 \overset{\times -1}{\Longrightarrow} 5^{-y} = -\frac{1}{2}5^{2x} - cln5 \Rightarrow 5^{-y} = -\frac{1}{2}5^{2x} + c_1 \quad (\text{حيث } c_1 = -cln5)$$

مثال : جد حلاً للمعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2$ ، $y = 9$

الحل :

$$y' - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - x\, y^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\, y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dy = x\,(y)^{\frac{1}{2}}dx \overset{(\div y^{\frac{1}{2}})}{\Longrightarrow} \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = x\, dx$$

$$y^{-\frac{1}{2}}\, dy = x\, dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int x\, dx \Rightarrow \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

نعوض $x = 2$ ، $y = 9$ فينتج :

$$2\sqrt{9} = \frac{(2)^2}{2} + c \Rightarrow 6 = 2 + c \Rightarrow c = 4$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 4 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} \sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 2 \overset{\text{بالتربيع}}{\Longrightarrow} y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$$

مثال : جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

الحل :

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow (x+1)dy = 2y\, dx \Rightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow ln|y| = 2ln|x+1| + c \Rightarrow ln|y| = ln(x+1)^2 + c$$

$$ln|y| - ln(x+1)^2 + c \Rightarrow ln\frac{|y|}{(x+1)^2} = c \xrightarrow{\text{نأخذ } e \text{ للطرفين}} \frac{|y|}{(x+1)^2} = e^c$$

$$|y| = e^c(x+1)^2 \Rightarrow y = \pm c_1(x+1)^2 \qquad (\text{حيث } c_1 = e^c)$$

حل تمارين (2 – 5)

س1 : حل المعادلات الاتية بطريقة فصل المتغيرات :

(a) $y'\ cos^3x = sinx$

$$\frac{dy}{dx}.cos^3x = sin\,x \Rightarrow (cos^3x)dy = (sin\,x)dx \Rightarrow dy = \frac{sin\,x}{cos^3x}dx$$

$$dy = \frac{sin\,x}{cos\,x}\frac{1}{cos^2x}dx \Rightarrow \int dy = \frac{sin\,x}{cos\,x}\frac{1}{cos^2x}dx \Rightarrow \int dy = \int tan\,x\ sec^2x\,dx$$

$$y = \frac{(tan\,x)^2}{2} + c$$

(b) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \qquad x = 1\ ,\ y = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3-y)$$

$$-1\int \frac{-dy}{3-y} = \int xdx \Rightarrow -ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c \qquad x = 1 \qquad y = 2$$

$$-ln|3-2| = \frac{1}{2} + c \Rightarrow -ln\,1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$-ln|3-y| = \frac{-x^2}{2} - \frac{1}{2} \overset{\times -1}{\Longrightarrow} ln|3-y| = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow 3 - y = e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = 3 - e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

(c) $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

$$\frac{dy}{(y-1)} = (x+1)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{(y-1)} = \int (x+1)dx \Rightarrow ln(y-1) = \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$(y-1) = e^{\frac{x^2}{2}+x+c} \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}+x+c} + 1$$

(d) $(y^2 + 4y - 1)y' = x^2 - 2x + 3$

$$(y^2 + 4y - 1)\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \int (y^2 + 4y - 1)dy = \int (x^2 - 2x + 3)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} + 2y^2 - y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c$$

(e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$$y\frac{dy}{dx} = 4\,(1+y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\,dx \Rightarrow \int \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\int dx$$

$$\int y\,(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}(dy) = \int 4dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int (1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,2y\,dy = \int 4\,dx$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{(1+y^2)^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 4x+c \Rightarrow -(1+y^2)^{\frac{-1}{2}} = 4x+c \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x+c$$

(f) $e^x.dx - y^3dy = 0 \Rightarrow e^x.dx = y^3dy \Rightarrow \int e^xdx = \int y^3dy \Rightarrow e^x = \frac{y^4}{4} + c$

$$\frac{y^4}{4} = e^x - c \Rightarrow y^4 = 4e^x - 4c \Rightarrow y = \pm\sqrt{4e^x - 4c} \Rightarrow y = \pm\sqrt{4e^x + c_1} \qquad c_1 = -4c$$

(g) $y' = 2e^xy^3 \qquad x = 0\ ,\ y = \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^xy^3 \Rightarrow dy = 2e^xy^3dx \overset{\div y^3}{\Rightarrow} \frac{dy}{y^3} = 2e^xy^3 \Rightarrow \int\frac{dy}{y3} = \int 2e^x\,dx =$$

$$\int y^{-3}dy = 2\int e^x\,dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c \Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c \Rightarrow \frac{1}{y^2} = -4e^x - 2c$$

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = -4e^0 - 2c \Rightarrow 4 = -4 - 2c \Rightarrow -2\,c = 8 \Rightarrow c = -4$$

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{-4e^x+8} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{-4e^x+8}}$$

س2 : جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

(a) $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2 \Rightarrow xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \Rightarrow xy\,dy = (1-2y^2)dx$$

$$\frac{y\,dy}{(1-2y^2)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{y\,dy}{(1-2y^2)} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{4}\int\frac{-4y\,dy}{(1-2y^2)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{4}\,ln|1-2y^2| = ln|x| + ln|c| \Rightarrow ln(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}} = ln|cx| \quad \text{بأخذ } e \text{ للطرفين}$$

$$(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}} = cx \Rightarrow \frac{1}{(1-2y^2)^{\frac{1}{4}}} = cx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{1-2y^2}} = cx \Rightarrow \sqrt[4]{1-2y^2} = \frac{1}{cx}$$

$$1 - 2y^2 = \frac{1}{(cx)^4} \Rightarrow 2y^2 = 1 - \frac{1}{(cx)^4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^4c^4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{c_1x^4}} \qquad 2c^4 = c_1$$

(b) $sin\,x\,cosy\frac{dy}{dx} + cos\,x\,sin\,y = 0$

$$sinx\,cos\,y\frac{dy}{dx} = -\,cos\,x\,sin\,y \Rightarrow \frac{cosy\,dy}{siny\,dx} = -\frac{cosx}{sin\,x} \Rightarrow \frac{cosy}{siny}\,dy = -\frac{cosx}{sin\,x}\,dx$$

$$\int \frac{cosy}{siny}\, dy = \int -\frac{cosx}{\sin x}\, dx \Rightarrow ln\,|siny| = -\,ln\,|sinx| + c$$

$$ln\,|siny| + ln\,|sinx| = c \Rightarrow ln|siny\ sinx| = c \Rightarrow \sin y \sin x = e^c$$

(c) $x cos^2 y\, dx + tany\, dy = 0$

$$tanydy = -x\, cos^2 y\, dx \xrightarrow{\div cos^2 y} \frac{tany}{cos^2 y} dy = -x\, dx \Rightarrow \int \frac{tany}{cos^2 y} dy = -\int x\, dx$$

$$\int tany.sec^2 y\, dy = \int tany.sec^2 y\, dy \Rightarrow \frac{(tany)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \overset{\times 2}{\Rightarrow} (tany)^2 = -x^2 + 2c$$

$$(tany)^2 + x^2 = 2c \Rightarrow \quad (tany)^2 + x^2 = c_1 \qquad c_1 = 2c$$

(d) $tan^2 ydy = sin^3 x\, dx \Rightarrow \int (sec^2 y - 1)dy = \int sin^2 x \sin x\, dx$

$$\int (sec^2 y - 1)dy = \int (1 - cos^2 x)sinx\, dx$$

$$\int (sec^2 y - 1)dy = \int [\, sinx - (cosx)^2 \sin x]\, dx$$

$$\int (sec^2 y)dy - \int dy = \int sinx\, dx - \int (cosx)^2\, (-\sin x)\, dx$$

$$tany - y = -\cos x + \frac{cos^3 x}{3} + c$$

(e) $\frac{dy}{dx} = cos^2 x\ cos^2 y \Rightarrow \frac{dy}{cos^2 y} = cos^2 x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{cos^2 y} = \int cos^2 x\, dx$

$$\int sec^2 y\, dy = \int \frac{1}{2}(1 + cos2x)dx \Rightarrow tany = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sin2x}{2}\right) + c$$

(f) $\frac{dy}{dx} = \frac{cosx}{3y^2 + e^y} \Rightarrow 3y^2 + e^y\, dy = \cos x\, dx \Rightarrow \int (3y^2 + e^y)dy = \int cosx\, dx$

$$\frac{3y^3}{3} + e^y = \sin x + c \Rightarrow y^3 + e^y = \sin x + c$$

(g) $e^{x+2y} + y' = 0 \Rightarrow e^x . e^{2y} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^x . e^{2y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{2y}} = -e^x\, dx$

$$\int \frac{dy}{e^{2y}} = -\int e^x\, dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\int e^{-2y}\, (-2)dy = -\int e^x dx$$

$$-\frac{1}{2} e^{-2y} = -e^x + c \overset{\times -2}{\Rightarrow} e^{-2y} = 2e^x - 2c \Rightarrow e^{-2y} = 2e^x + c_1 \qquad c_1 = -2c$$

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة

ثانيا : المعادلة التفاضلية المتجانسة

هي المعادلة التي نستطيع كتابتها بالشكل $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ فمثلا المعادلة $(x^4 - y^4)\frac{dy}{dx} = x^3 y$ يمكن كتابتها بالصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^4}$$ (بقسمة طرفي المعادلة على x^4)

ملاحظة : بوضع x عن كل y في المعادلة فاذا كانت الاسس متساوية فإن المعادلة متجانسة .

مثال : بين اي المعادلات التالية متجانسة :

$(1)\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{3x^2y}$ بقسمة البسط والمقام على $x^3\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}}{\frac{3x^2y}{x^3}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^3}{3(\frac{y}{x})}$$ المعادلة متجانسة

$(2)\ 2\,x\,y'-y^2+2x^2=0$ بالقسمة على $x^2\neq 0$

$$2\frac{y}{x}\,y'-\frac{y^2}{x^2}+2=0\Rightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}-\left(\frac{y}{x}\right)^2+2=0$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{y}{x})^2-2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$ المعادلة متجانسة

$(3)\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x^3}$ غير متجانسة لأنه لا يمكن كتابتها بالشكل $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

طريقة حل المعادلة التفاضلية المتجانسة : اذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة فإننا نتبع ما يأتي :

١) نكتب المعادلة بالصورة $[\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)]$ ثم نعوض عن كل $[v=\frac{y}{x}]$ أو $[y=v\,x]$ حيث v دالة الى x .

٢) نشتق $y=v\,x$ بالنسبة الى x فنحصل على $[\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}]$

٣) نربط بين الخطوتين (1)و(2) فنحصل على $v+x\frac{dv}{dx}=f(v)\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$

٤) بعد فصل المتغيرات نحصل $\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x}$

٥) نكامل الطرفين فنحصل على الحل العام وأخيرا $[v=\frac{y}{x}]$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$

الحل :

$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$ بقسمة البسط والمقام على $x^2\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})}\ \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}\ \dots\dots\dots(2)\qquad [v=\frac{y}{x}\ \text{وضعنا}]$$

$$\because y=v\,x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\ \dots\dots\dots(3)$$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}-v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}\Rightarrow\frac{1}{x}\,dx=\frac{2v}{v^2-1}\,dv$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2v}{v^2-1}dv\Rightarrow ln\,|x|=ln\,|v^2-1|+ln\,|c|$$

$$ln\,|x|=ln\,|c(\,v^2-1)|\Rightarrow x=\pm\,c(v^2-1)$$

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow\ x=\pm c\left[\frac{y^2}{x^2}-1\right]\Rightarrow x=\pm c\left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right)\Rightarrow c=\pm\frac{x}{\left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right)}\Rightarrow c=\pm\left(\frac{x^3}{y^2-x^2}\right)$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$

الحل :

$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$ بقسمة البسط والمقام على $x\neq\ 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v+1}{v-1}\ldots\ldots\ldots(2)\qquad[v=\frac{y}{x}\ \text{وضعنا}]$$

$\because\ y=vx\ \Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\,\frac{dv}{dx}\ldots\ldots\ldots(3)$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v\ +\ x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}-v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1-v(v-1)}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1-v^2+v}{v-1}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{2v-v^2+1}{v-1}$$

$$\therefore\frac{v-1}{2v-v^2+1}dv=\frac{1}{x}\,dx\Rightarrow\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{v-1}{2v-v^2+1}dv$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{-1}{2}\int\frac{(-2)v-1}{2v-v^2+1}dv\ \Rightarrow\frac{-1}{2}ln|2v-v^2+1|=ln|x|+ln|c|$$

$$ln|2v-v^2+1|^{\frac{-1}{2}}=ln|cx|\Rightarrow ln\,\left|\frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}}\right|=ln\,|cx|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}}=cx\Rightarrow\sqrt{2v-v^2+1}=\frac{1}{cx}\xRightarrow{\text{بتربيع الطرفين}}2v-v^2+1=\frac{1}{c^2x^2}$$

$\because v=\frac{y}{x}\ \Rightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\frac{1}{c^2x^2}$ (نضرب طرفي المعادلة بـ x^2)

$$2yx - y^2 + x^2 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow x^2 + 2yx - y^2 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow x^2 + 2yx - y^2 = k$$ حيث $k = \frac{1}{c^2}$

مثال : حل المعادلة $(3x - y)y' = x + y$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$ (نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{3\frac{x}{x}-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}} \; \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \dots\dots\dots (2)$$ [وضعنا $v = \frac{y}{x}$]

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (3)$$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{(v-1)^2}{3-v}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{3-v}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \int \frac{-(v-3)}{(v-1)^2}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{-[(v-1)-2]}{(v-1)^2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{-(v-1)}{(v-1)^2}dv + \int \frac{2}{(v-1)^2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dv}{v-1} + (2)\int (v-1)^{-2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-ln|v-1| + \frac{2(v-1)^{-1}}{-1} + c = ln|x| \Rightarrow -ln|v-1| + \frac{-2}{(v-1)} + c = ln|x|$$

$$\because v = \frac{y}{x} \Rightarrow ln|x| - ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| - \frac{2}{\frac{y}{x} - 1} + c$$

$$ln|x| + ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| = \frac{-2}{\frac{y-x}{x}} + c \Rightarrow ln\left|x\left(\frac{y}{x} - 1\right)\right| = \frac{-2x}{y-x} + c$$

$$ln|y-x| = \frac{-2x}{y-x} + c$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

الحل :

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$ (نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} \dots\dots\dots (2)$$ [وضعنا $v = \frac{y}{x}$]

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx} \dots\dots\dots (2)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} \dots\dots\dots (3)$$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2-1}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-(v^2+1)}{2v}$$

$$\frac{2v}{(v^2+1)}dv = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2v}{v^2+1}\,dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln\,|v^2+1| + ln\,|c| = -ln\,|x|$$

$$ln\,|v^2+1| + ln\,|x| = -ln\,|c| \Rightarrow ln\,|x(v^2+1)| = ln\,|c^{-1}|$$

$$ln\,|x(v^2+1)| = ln\left|\frac{1}{c}\right| \Rightarrow \pm x(v^2+1) = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{x(v^2+1)}$$

$$\because v = \frac{y}{x} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{x\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x}\right)} \Rightarrow c$$

$$= \pm\frac{x}{y^2+x^2}$$

مثال : جد الحد العام للمعادلة التفاضلية $2\,x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$$ (نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v^2}{2} \dots\dots\dots\dots(2)$ $\qquad$ [وضعنا $v = \frac{y}{x}$]

$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{x} \dots\dots\dots(3)$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-2v}{2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{2}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{(v-1)^2}{2} \Rightarrow \int \frac{2\,dv}{(v-1)^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int 2\,(v-1)^{-2}dv = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{2(v-1)^{-1}}{-1} = ln|x| + c \Rightarrow \frac{-2}{v-1} = ln|x| + c$ $\qquad$ (نضع $v = \frac{y}{x}$)

$\frac{-2}{\frac{y}{x} - 1} = ln|x| + c \Rightarrow \frac{-2}{\frac{y-x}{x}} = ln|x| + c \Rightarrow \frac{-2x}{y-x} = ln|x| + c$

$y - x = \frac{-2x}{ln|x| + c} \Rightarrow y = x - \frac{2x}{ln|x| + c}$

حل تمارين (3 – 5)

حل كلاً من المعادلات التفاضلية الاتية :

(1) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ $\qquad$ [وضعنا $v = \frac{y}{x}$]

$\frac{dy}{dx} = v + e^v \dots\dots\dots(1)$

$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots(2)$ $\qquad$ نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) فينتج :

$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = e^v \Rightarrow xdv = e^v dx \Rightarrow \frac{dv}{e^v} = \frac{dx}{x}$

$\int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-v} + c = ln|x| \Rightarrow ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + c$

(2) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

$x^2dy = -(y^2 - xy)\,dx \Rightarrow x^2dy = (xy - y^2)\,dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$ $\qquad$ (بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{xy}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2 \dots\dots\dots(1)$$

$\frac{dy}{dx}=v-(v)^2 \dots\dots\dots(2)$ $\quad$ ($v=\frac{y}{x}$ وضعنا)

$\because y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\dots\dots\dots(3)$ $\quad$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$\therefore v+x\frac{dv}{dx}=v-v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-v^2 \Rightarrow x\,dv=-v^2dx \Rightarrow \frac{dv}{v^2}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v^2}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int v^{-2}\,dv=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{v^{-1}}{-1}+c=-ln|x|$$

$$-ln|x|=\frac{-1}{v}+c \xRightarrow{(\times -1)} ln|x|=\frac{1}{\frac{y}{x}}-c \Rightarrow ln|x|=\frac{x}{y}-c \Rightarrow ln|x|=\frac{x}{y}+c_1 \quad \boxed{-c=c_1}$$

(3) $(x+2y)\,dx+(2x+3y)\,dy=0$

$(2x+3y)dy=-(x+2y)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x-2y}{2x+3y}$ $\quad$ (نقسم البسط والمقام على $x\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-x}{x}-\frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x}+3\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1-2\frac{y}{x}}{2+3\frac{y}{x}}\dots\dots\dots(1)$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v}\dots\dots\dots(2)$ $\quad$ ($v=\frac{y}{x}$ وضعنا)

$\because y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\dots\dots\dots(3)$ $\quad$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-v(2+3v)}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-(3v^2+4v+1)}{2+3v}$$

$$x\,dv=\frac{-3v^2-4v-1}{2+3v}\,dx \Rightarrow \int\frac{(2+3v)dv}{3v^2+4v+1}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2(2+3v)dv}{3v^2+4v+1}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}ln|3v^2+4v+1|=-ln|x|+c \Rightarrow \frac{1}{2}ln\left|3\left(\frac{y}{x}\right)^2+4\frac{y}{x}+1\right|=-ln|x|+c$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ $(x^2\neq 0$ نقسم البسط والمقام على$)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2\frac{y}{x}}\dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}\dots\dots\dots(2)$$ $(v=\frac{y}{x}$ وضعنا$)$

$$\because y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\dots\dots\dots(3)$$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{2v}\Rightarrow x\,dv=\frac{1-v^2}{2v}\,dx\Rightarrow\frac{2v\,dv}{1-v^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow-\int\frac{-2v\,dv}{(1-v^2)}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\ln\left|(1-v^2)\right|+c=\ln|x|\Rightarrow\ \ln\left|(1-v^2)\right|+\ln|x|=\ln|c|$$

$$\ln\left|(1-v^2)x\right|=\ln|c|\Rightarrow\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)x=\pm c\Rightarrow x=\pm\frac{c}{\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}$$

$$x=\pm\frac{cx^2}{(x^2-y^2)}$$

(5) $(y^2-x^2)dx\ +\ xy\,dy=0\ \Rightarrow xy\,dy=-(y^2-x^2)dx$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{xy}$$ $(x^2\neq 0$ نقسم البسط والمقام على$)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1-(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}\dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-v^2}{v}\dots\dots\dots(2)$$ $(v=\frac{y}{x}$ وضعنا$)$

$$\because y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\dots\dots\dots(3)$$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v}-v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2-v^2}{v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v^2}{v}$$

$$\frac{v\,dv}{1-2v^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{-1}{4}\int\frac{(-4)\,v\,dv}{1-2v^2}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{-1}{4}ln|1-2v^2|+ln|c|=ln|x|$$

$$ln|1-2v^2|^{\frac{-1}{4}}+ln|c|=ln|x|\Rightarrow ln\left|c(1-2v^2)^{\frac{-1}{4}}\right|=ln|x|$$

$$\therefore x=\pm\frac{c}{(1-2v^2)^{\frac{1}{4}}}\Rightarrow x=\pm\frac{c}{\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}\Rightarrow x=\pm\frac{c}{\left(1-2\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

(6) $x^2y\,dx=(x^3+\;y^3)dy$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}$$
(نقسم البسط والمقام على $x^3\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3+y^3}{x^3}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}\;\dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{1+v^3}\;\dots\dots\dots(2)$$
(وضعنا $v=\frac{y}{x}$)

$$\because y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\,\frac{dv}{dx}\dots\dots\dots(3)$$
نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+\;v^3}\Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+\;v^3}-v\;\Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v-v\,(1+\;v^3)}{1+\;v^3}$$

$$x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v-v-\;v^4}{1+\;v^3}\Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{-\,v^4}{1+\;v^3}\Rightarrow\frac{1\;+\;v^3}{v^4}\;dv=\frac{-\,dx}{x}$$

$$\int\frac{1\;+\;v^3}{v^4}dv=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1}{v^4}dv+\int\frac{v^3}{v^4}\;dv=-\int\frac{dx}{x}$$

$$-\int\frac{dx}{x}=\int v^{-4}\,dv+\int\frac{1}{v}\;dv\;\Rightarrow-ln\;|x|=\frac{v^{-3}}{-3}+ln\;|v|+c$$

$$-\,ln|x|=\frac{-1}{3v^3}\;+ln\;|v|+c\Rightarrow\frac{1}{3v^3}=ln\;|x|+ln\;|v|+c$$

$$\frac{1}{3v^3} = ln\,|xv| + c \Rightarrow \frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3} = ln\,\left|x\frac{y}{x}\right| + c \Rightarrow \frac{1}{3\,\frac{y^3}{x^3}} = ln\,|y| + c$$

$$\frac{x^3}{3y^3} = ln\,|y| + c \Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{3ln\,|y| + c} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt[3]{3ln\,|y| + c}}$$

$7)\; x\left(\frac{dy}{dx} - tan\,\frac{y}{x}\right) = y$

$$\left(\frac{dy}{dx} - tan\,\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tan\,\frac{y}{x} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = v + tan\,v \ldots\ldots\ldots(2)$$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots(3)$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + tan\,v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = tan\,v \Rightarrow \frac{dv}{tan\,v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{\frac{sin\,v}{cos\,v}}\,dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{cos\,v}{sin\,v}\,dv \Rightarrow ln\,|x| = ln\,|sin\,v| + ln\,|c|$$

$$ln|x| = ln\,|c\,(sin\,v)| \Rightarrow |x| = |c\,(sinv)| \Rightarrow x = \pm\,c\,(sin\,v) \Rightarrow x = \pm\,c\,(sin\,\tfrac{y}{x})$$

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الخامس

س14 : حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y' = \frac{cos^2 y}{x}\quad ,\quad y = \frac{\pi}{4}\quad ,\ x = 1$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{x} \Rightarrow xdy = cos^2 y\,dx \xRightarrow{(\div x\,cos^2 y)} \frac{dy}{cos^2 y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{cos^2 y} = \int \frac{dx}{x}$$

$\int sec^2 y\,dy = \int \frac{dx}{x}$ $\qquad \frac{1}{cos^2 y} = sec^2 y$

$tan\,y = ln\,|x| + c$ $\qquad tan\,\frac{\pi}{4} = 1\ ,\ ln\,1 = 0$

$$tan\,\frac{\pi}{4} = ln\,|1| + c \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore tan\,y = ln\,|x| + 1$$

س15 : حل المعادلة التفاضلية الاتية : $\frac{dy}{dx} = -2x \tan y$ حيث $x = 0$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = -2x \tan y \Rightarrow [dy = -2x \tan y \, dx] \div \tan y$$

$$\frac{dy}{\tan y} = -2x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \int -2x\, dx \Rightarrow \int \frac{\cos y\, dy}{\sin y} = \int -2x\, dx$$

$$\ln|\sin y| = -2\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \ln|\sin y| = -x^2 + c \qquad y = \frac{\pi}{2} \;,\; x = 0$$

$$\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 0 + c \Rightarrow \ln(1) = c \Rightarrow c = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\therefore \ln|\sin y| = -x^2 \xRightarrow{\text{بأخذ } e \text{ للطرفين}} \sin y = e^{-x^2}$$

س16 : حل المعادلة التفاضلية الاتية : $\acute{y} = 2e^x y^3$ حيث $x = 0$ عندما $y = \frac{1}{2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = 2e^x\, dx \Rightarrow \int y^{-3} dy = 2\int e^x\, dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = 2\,e^x + c$$

$$\frac{1}{-2y^2} = 2\,e^x + c \Rightarrow \frac{1}{-2\frac{1}{4}} = 2\,e^0 + c \qquad x = 0 \;,\; y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\frac{-1}{2}} = 2\,.\,1 + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -4 \qquad e^0 = 1$$

$$\frac{1}{-2y^2} = 2\,e^x - 4$$

س16 : (حسب المنهج الجديد) حل المعادلة التفاضلية الاتية : $x\,\acute{y} = y - x$ حيث ان $y = 1 , x = 1$

الحل :

$$x\frac{dy}{dx} = y - x \xRightarrow{(\div x)} \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = v - 1 \ldots\ldots\ldots (2) \qquad (v = \frac{y}{x} \text{ وضعنا})$$

$$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow x\,dv = -dx \xRightarrow{(\div x)} dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\int dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow v = -ln\,|x| + c \Rightarrow \frac{y}{x} = -ln|x| + c$$

نعوض $x = 1$, $y = 1$ لإيجاد قيمة الثابت c

$$\frac{y}{x} = -ln|x| + c \Rightarrow \frac{1}{1} = -ln|1| + c \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore \frac{y}{x} = -ln|x| + c$$

س17 : حل المعادلة التفاضلية الاتية : $(x^2 + 3y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

الحل :

$$(x^2 + 3y^2)dx = 2xy\,dy \Rightarrow 2xy\frac{dy}{dx} = (x^2 + 3y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$$ (نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \frac{1 + 3(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} \ldots\ldots\ldots (2)$$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots (3)$$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2 - 2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+1}{2v} \Rightarrow x\,dv = \frac{v^2+1}{2v}dx \Rightarrow \frac{dv}{\frac{v^2+1}{2v}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{2vdv}{v^2+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2vdv}{v^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln\,|v^2+1| + ln|c| = ln|x| \Rightarrow ln|x| = ln\,|c(v^2+1)|$$

$$x = c\,.(v^2+1) \Rightarrow x = c\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) \Rightarrow x = c\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)$$

الفصل السادس

الهندسة الفضائية



الهندسة الفضائية

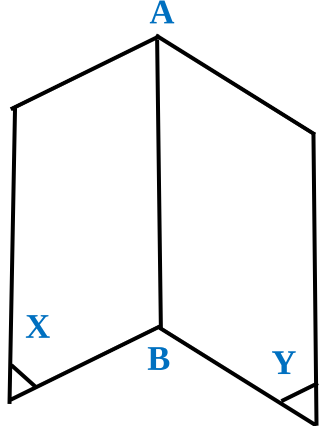
مراجعة :

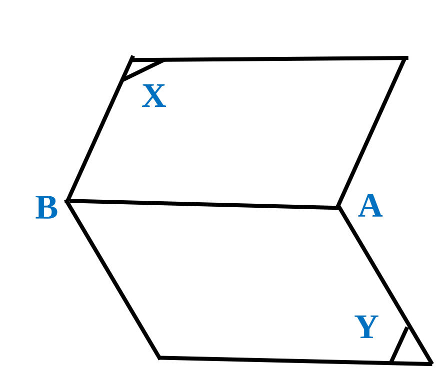
١. لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما .
٢. لكل مستقيمن متوازيان يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما .
٣. عبارة التوازي (اذا علم مستقم ونقطة لا تنتمي اليه فيوجد مستقيم وحيد يمر من تلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم) .
٤. في المستوي الواحد المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر .
٥. المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر .
٦. في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة (تنتمي للمستقيم أو لا ينتمي اليه) .
٧. اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما ونقطة من الاخر فإنه يحتويهما .
٨. المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر .
٩. في المستوي الواحد المستقيمان العموديان على مستقيم واحد متوازيان .
١٠. اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الاخر .
١١. المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما .
١٢. المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن المستوي .
١٣. اذا كان كل من مستقيمين متقاطعين يوازيان مستوي معلوم فان مستويهما يوازي المستوي المعلوم .
١٤. اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوت الزاويتان وتوازى مستويهما .
١٥. قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعي مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه بالقياس .
١٦. العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها .
١٧. اذا وازى مستقيم مستوي فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوي موازيا للمستقيم المعلوم يكون محتوى في ذلك المستوي .
١٨. المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان .
١٩. المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان .
٢٠. يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا توازى كل ضلعين متقابلين فيه .
٢١. يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا توازى وتساوى ضلعين متقابلين فيه .
٢٢. المستطيل هو متوازي اضلاع احدى زواياه قائمة .
٢٣. يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم من نقطة معلومة .
٢٤. يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محددة بهما .
٢٥. العمود النازل من نقطة معلومة على مستوٍ هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة والمستوي .
٢٦. مبرهنة الاعمدة الثلاثة ونتيجتها .

الزاوية الزوجية والمستويات المتعامد

الزاوية الزوجية : إتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة .

وتسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل :

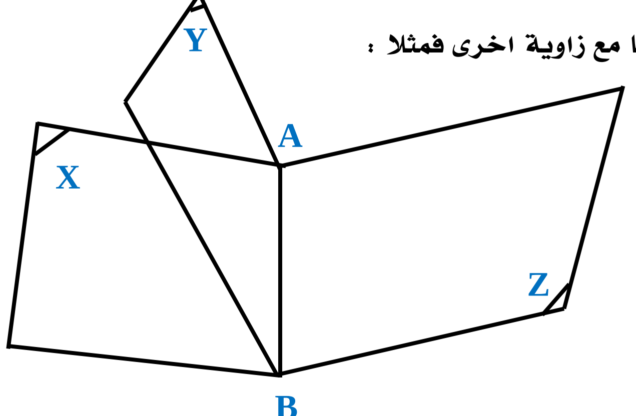




حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية

(X) و (Y) هما وجهاها ، ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير : $(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركا مع زاوية اخرى فمثلا :



الزاوية الزوجية :

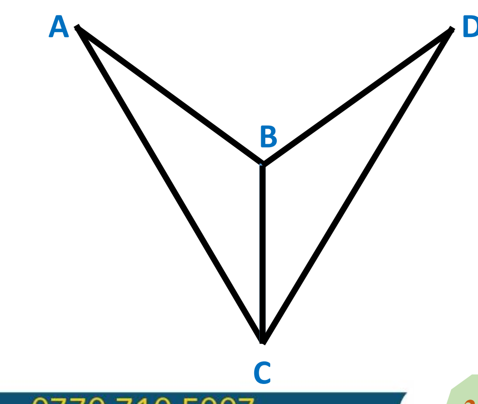
$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(z)$

$(z)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

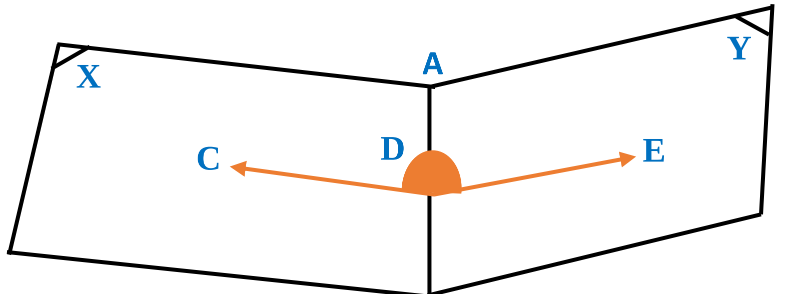
ولا يمكن أن تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في أكثر من زاوية زوجية .

ملاحظة : عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد ، تكتب الزاوية الزوجية $A-\overleftrightarrow{BC}-D$ أو الزاوية الزوجية بين المستويين (DBC) أو (ABC) كما في الشكل .



وتقاس الزاوية الزوجية كالاتي : نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overrightarrow{DC}$ في (X) والعمود $\overrightarrow{DE}$ في (Y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية ، كما في الشكل :

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$



ولدينا $\overrightarrow{DC} \subset (X) \,,\ \overrightarrow{DE} \subset (Y)$

$\overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB} \,,\ \overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \sphericalangle CDE$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ أو $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية : هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية .

أو : هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية .

ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنساخ الاتي :

1) قياس زاوسة عائدة لزاوية زوجية ثابت .

2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس .

ملاحظة : اذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فإن المستويين متعامدان وبالعكس .

اي : اذا كان قياس $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90^\circ$ فإن $X \perp Y$

مبرهنة (7) : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على المستوى الاخر . وزاري (١د/٢٠١١ – ٢د/٢٠١٣ – ٣د/٢٠١٥)

Y
C A
X
E
D
B

اي انه :

اذا كان $(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = AB$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \,,\ \overleftrightarrow{CD} \perp (Y)$ في D فإن $\overleftrightarrow{CD} \perp X$

المعطيات :

في نقطة D ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $(X) \perp (Y)$ ، $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ (معطى)

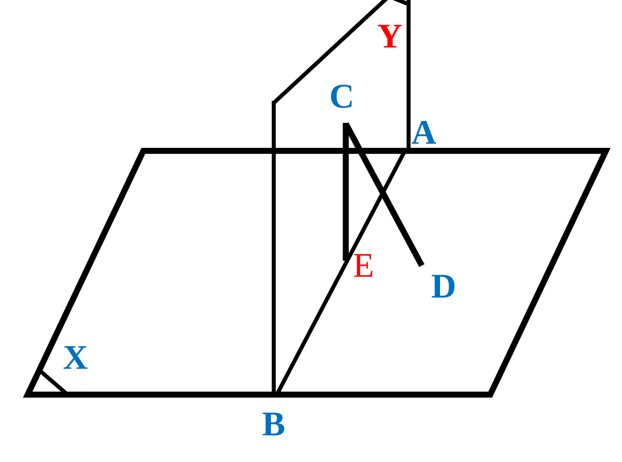
$\therefore$ $\measuredangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore$ $m\measuredangle CDE = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين $90°$ فإن المستقيمين متعامدان وبالعكس)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

نتيجة مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في أحدهما عموديا على المستوي الاخر يكون محتوى فيه . وزاري (٢٠١٣/د٣ – ٢٠١٥/د٢)



المعطيات : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ ، $c \subset (Y)$ ، $(X) \perp (Y)$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهان :

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

ان لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$ وعمودي على $\overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

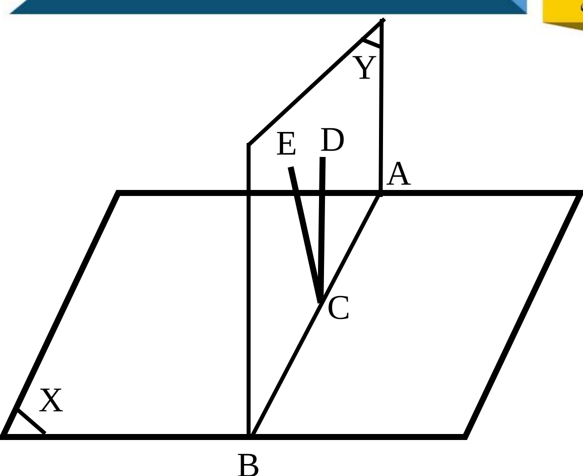
$\because$ $(X) \perp (Y)$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CE} \perp (X)$ (مبرهنة 7) (اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على المستوى الاخر)

ولكن $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

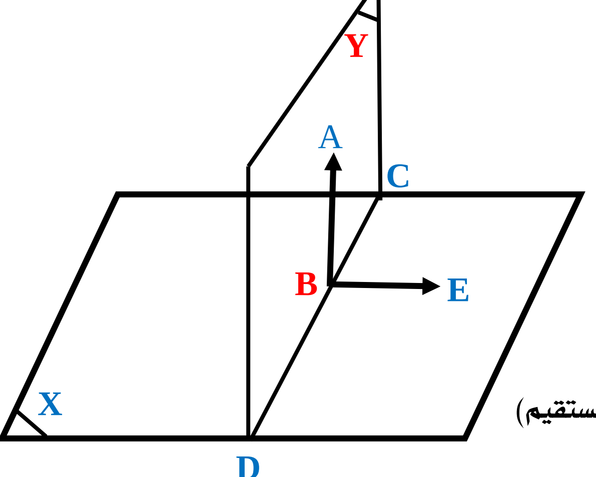
$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \equiv \overleftrightarrow{CE}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة تنتمي أو لا تنتمي اليه)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ (و . هـ . م)



مبرهنة (8) : كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عموديا على ذلك المستوي .

أو : يتعامد المستويان اذا أحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر . وزاري (٢٠١١ / د١ – ٢٠١٦/د١ – ٢٠١٨)



اي أنه :

$$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (Y) \perp (X)$$

المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب اثباته : $(Y) \perp (X)$

البرهان : ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي على النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتوى في المستوي والمار من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

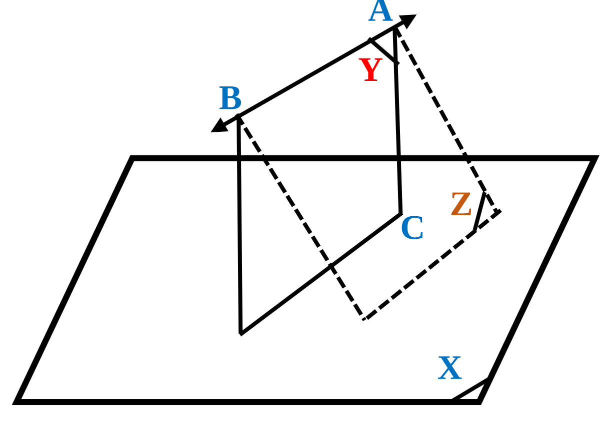
$\therefore \measuredangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\measuredangle ABE = 90°$ (لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (X) = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية $90°$ فإن المستويين متعامدان وبالعكس)

مبرهنة (9) : من مستقيم غيرعمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم .



اي أنه : $\overleftrightarrow{AB}$ غيرعمودي على (X)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

المعطيات : $\overleftrightarrow{AB}$ غيرعمودي على (X)

المطلوب اثباته : ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان :

من نقطة (A) نرسم $(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ مبرهنة (8) (يتعامد المستويان اذا أحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

ولبرهنة الوحدانية :

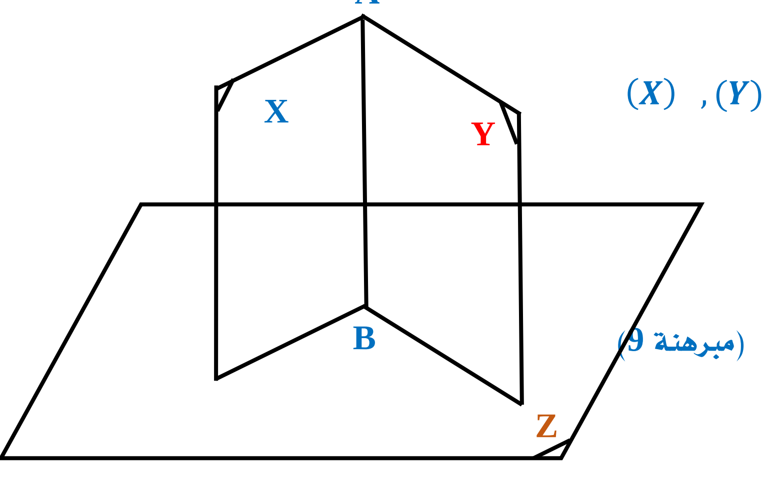
ليكن (Z) مستوي آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (9) : اذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث .



المعطيات : $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$ ، $(X) \ , (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان : ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عموديا على (Z)

لما وجد أكثر مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعموديا على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ و . هـ . م

مثال (1) : في $\Delta\, ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m \sphericalangle A = 30$, $AB = 10\ cm$, $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات :

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m \sphericalangle BAC = 30°$, $AB = 10\ cm$, $BD = 5cm$

المطلوب اثباته : ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان :

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\sphericalangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)



$\Delta\, DBE$ قائم الزاوية في B

في $\Delta\, BEA$ القائم الزاوية في E :

$$\sin 30 = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5\ cm$$

في $\Delta\, DBE$ قائم الزاوية في B :

$$\tan \sphericalangle DEB = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m \sphericalangle BED = 45°$

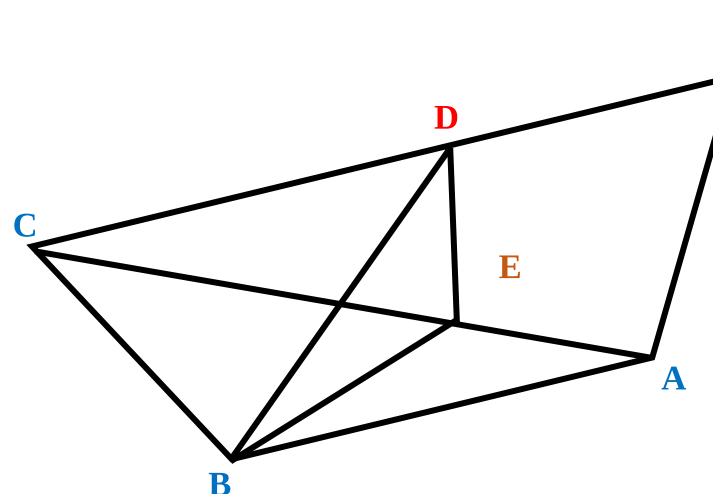
$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45°$

(قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس) . و . هـ . م

مثال (2) : ليكن ABC مثلثا وليكن $\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن أن : $\overline{BE} \perp (CAF)$ ، $\overline{ED} \perp \overline{CF}$



المعطيات :

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp \overline{CA}$, $\overline{AF} \perp (ABC)$

المطلوب اثباته : $\overline{DE} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان :

$\therefore$ $\overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $(CAF) \perp (ABC)$ مبرهنة (8) (يتعامد المستويان اذا أحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

$\because$ $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{BE} \perp (CAF)$ مبرهنة (7) (اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على الاخر)

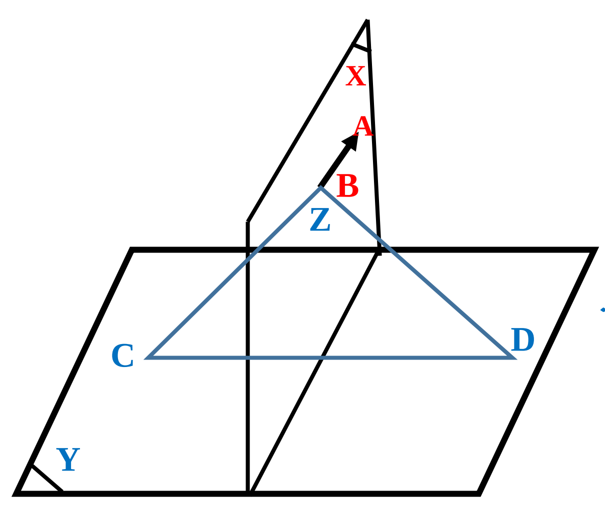
$\because$ $\overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{DE} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة) و . هـ . م

مثال (3) : (X), (Y) مستويان متعامدان $AB \subset (X)$ (وزاري ٢٠١٢ / د٢)

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C , D

على الترتيب . برهن أن $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$



المعطيات : ان (X), (Y) ، $AB \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C , D على الترتيب .

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$

(لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستويا وحيدا يحويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

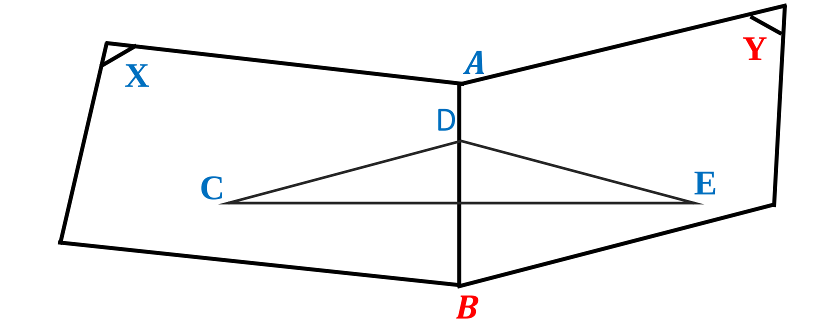
$\therefore (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Z) \cap (Y)$ (لأنه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (اذا كان كل من مستويين متقاطعين على مستو ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث)

حل تمارين $(1 - 6)$

س1/ برهن ان مستوي الزاوية العائدة لزاوية زوجية عمودية على حرفها . (وزاري ٢٠١٣/ د١)



المعطيات :

الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

والزاوية المستوية العائدة لها $\measuredangle CDE$

المطلوب اثباته : $\overline{AB} \perp (CDE)$

البرهان :

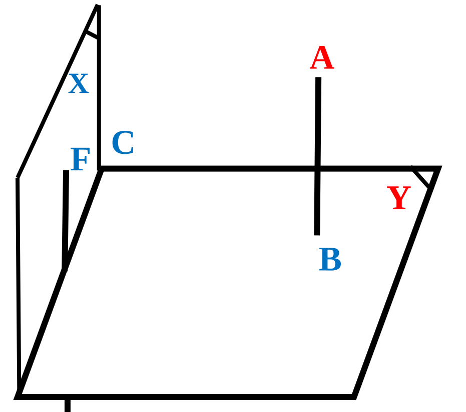
$\because \measuredangle CDE$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (معطى)

$\begin{cases} \overline{AB} \perp \overline{DC} \\ \overline{AB} \perp \overline{DE} \end{cases}$ (من تعريف الزاوية العائدة لزاوية زوجية)

(هي الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية)

$\therefore \overline{AB} \perp (CDE)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

س2/ برهن انه اذا وازى مستقيم مستويا وكان عموديا على مستوٍ آخر فإن المستويين متعامدان .



المعطيات : $\overline{AB} \perp (Y)$ ، $\overline{AB} // (X)$

المطلوب اثباته : $(Y) \perp (X)$

البرهان : ان لم يكن (X) يقطع (Y) فإن $(X)//(Y)$

$\because$ $(Y) \perp \overline{AB}$ (معطى)

$\therefore$ $(X) \perp \overline{AB}$ (معطى) (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

ولكن هذا خلاف المعطيات $\Leftarrow$ $\therefore$ (Y) يقطع (X)

وليكن $\overline{CD} = (Y) \cap (X)$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

لتكن $E \in \overline{CD}$ ، ولتكن $\overline{AB}//\overline{EF}$ (عبارة التوازي : يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

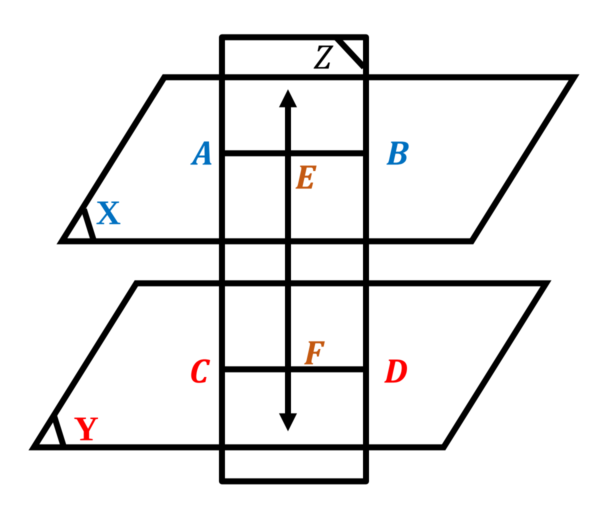
$\because$ $(X) // \overline{AB}$ (معطى)

$(X) \subset \overline{EF}$ (اذا وازى مستقيم مستويا معلوما فالمستقيم المرسوم من اية نقطة من نقط المستوي موازيا للمستقيم المعلوم يكون محتوى فيه)

$\therefore$ $(Y) \perp \overline{AB} \Leftarrow (Y) \perp \overline{EF}$ (المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ (كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ يكون عموديا على المستوٍ الآخر)

س3/ برهن ان المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر . وزاري (٢٠١٤/د٢)



المعطيات : $(Y) // (X)$ ، $(X) \perp (Z)$

المطلوب اثباته : $(X) \perp (Z)$

البرهان : ليكن

$$\begin{cases} (Z) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB} \\ (Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD} \end{cases}$$ يتقاطع المستويان بخط مستقيم

ولتكن $E \in \overleftrightarrow{AB}$

نرسم $\overleftrightarrow{EF} \subset (Z)$ بحيث $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because (X) \perp (Z)$ (معطى)

$(Y) \perp \overleftrightarrow{EF}$ (اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على الآخر)

$(Y) // (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

س4/ A , B , C , D اربع نقاط ليست على في مستوٍ واحد بحيث $\overline{AC} = \overline{AB}$ ، $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن $CD = BD$.

المعطيات : A , B , C , D اربع نقاط مختلفة ليست في مستوٍ واحد


$\overline{AB} = \overline{AC}$ ، $\measuredangle AED$ مستوية عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب اثباته : $CD = BD$

البرهان :

$\because \measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ (معطى)

$\therefore \begin{cases} \overline{AE} \perp \overline{BC} \\ \overline{DE} \perp \overline{BC} \end{cases}$ (الزاوية العائدة هي الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية)

في المثلث $ABC \Leftarrow \overline{AB} = \overline{AC}$ (معطى)

$\therefore BE = CE$ (العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

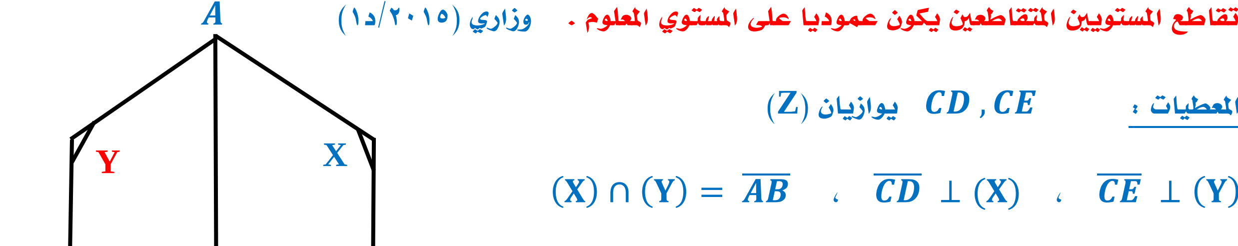
المثلثان DEC , DEB فيهما : $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (قوائم)

ED (ضلع مشترك) ، $BE = CE$ (بالبرهان)

$\therefore$ يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محددة بهما .

ومن التطابق ينتج : $CD = BD$

س5/ برهن أنه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستويا معلوما وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فإن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عموديا على المستوي المعلوم . وزاري (٢٠١٥/د١)



المعطيات : $CD\,,CE$ يوازيان (Z)

$\overline{CE}\perp(Y)$ ، $\overline{CD}\perp(X)$ ، $(X)\cap(Y)=\overline{AB}$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{AB}\perp(Z)$

البرهان : ليكن (M) مستوي المستقيمين المتقاطعان

$\overline{CD}\,,\overline{CE}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوٍ واحد)

$\because CD\,,CE//(Z)$ (معطى)

$\therefore (Z)//(M)$ (اذا كان كل من مستقيمين متقاطعين يوازيان مستويا معلوما فإن مستويهما يوازي المستوي المعلوم)

وليكن $\begin{cases}\overline{CD}\perp(X)\\ \overline{CE}\perp(Y)\end{cases}$ معطى

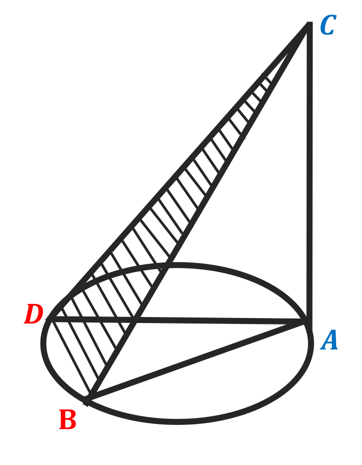
$(M)\perp(X)\,,(Y)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

$\because (X)\cap(Y)=AB$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AB}\perp(M)$ (اذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث)

$\overleftrightarrow{AB}\perp(Z)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على المستوي الاخر) و . هـ . م

س6/ دائرة قطرها $\overline{AB}\,,\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة برهن ان $(CDB)\perp(CDA)$.



المعطيات : $\overline{AB}$ قطر في دائرة و $\overline{AC}\perp$ (مستوي الدائرة)

D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب اثباته : $(CDB)\perp(CDA)$

البرهان :

$\because \measuredangle ADB$ زاوية محيطية

$\therefore m\measuredangle ADB=90^\circ$ (الزاوية المحيطية المقابلة لنصف دائرة قائمة)

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{DB}$ (اذا كانت الزاوية بين مستقيمين قائمة فإن المستقيمين متعامدين)

$\because \overline{AC}$ عمودي على مستوى الدائرة (معطى)

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore$اصبح لدينا : $\overline{DB} \perp \overline{CD}, \overline{AD}$ (بالبرهان)

$\overline{DB} \perp CDA$(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

ولكن $\overline{DB} \subset CDB$

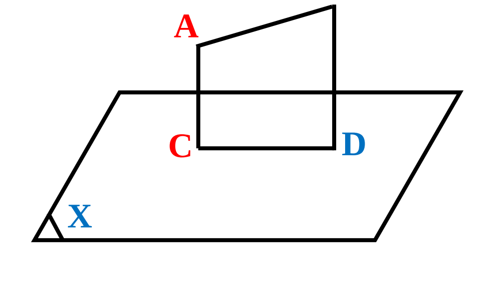
$\therefore (CDA) \perp (CDB)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر) و . هـ . م

الاسقاط العمودي على مستــو

١) مسقط نقطة على مستوٍ : هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي

٢) مسقط مجموعة نقط على مستوي : لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فإن مسقطها هو مجموع كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .

٣) مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم : هي القطعة المستقيمة المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة المستقيمة على المستوي .



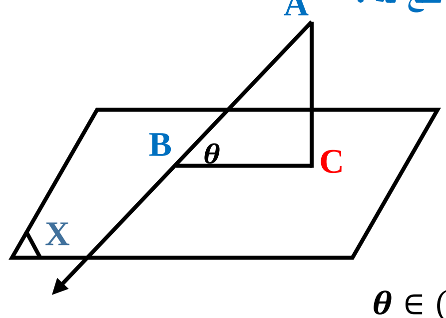
ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X)

وليكن $\overline{AC} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط A على (X) هو C

$\overline{BD} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط B على (X) هو D

$\therefore$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$

ملاحظة : اذا كان $\overline{AB} // (X)$ فإن $AB = CD$



٤) المستقيم المائل على مستوٍ : هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له .

٥) زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي .

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C

$\therefore C$ مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

$\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) أي ان $0 < \theta < 90°$ ، $\theta \in (0, 90°)$

٦) طول المسقط : طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ فإن $BC = AB\cos\theta$

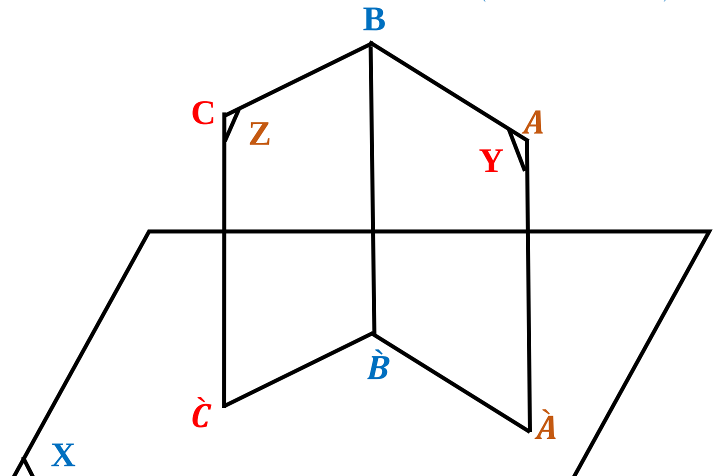
٧) مسقط مستوي مائل على (X) : زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما .

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل

A مساحة المنطقة المائلة و A' مساحة المسقط و θ قياس زاوية الميل $A' = A.\cos\theta$

مثال (4) : اذا وازى أحد ضلعي زاوية قائمة مستويا معلوما فإن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان .

المعطيات : $\measuredangle ABC$ قائمة في B ، $\overline{AB} \,//\, (X)$ (وزاري ٢٠١٣/د٢)



$\overline{\grave{A}\grave{B}}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{\grave{B}\grave{C}}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

المطلوب اثباته : $\overline{\grave{A}\grave{B}} \perp \overline{\grave{B}\grave{C}}$

البرهان :

$\overline{\grave{A}\grave{B}}$ مسقط $\overline{AB}$ ، $\overline{\grave{B}\grave{C}}$ مسقط $\overline{BC}$ (معطى)

$\Leftarrow (X) \perp \overline{A\grave{A}}, \overline{B\grave{B}}, \overline{C\grave{C}}$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\overline{A\grave{A}} \,//\, \overline{B\grave{B}}$ ، $\overline{C\grave{C}} \,//\, \overline{B\grave{B}}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{B\grave{B}}, \overline{C\grave{C}}$ نعين (Z)
بالمستقيمين المتوازيين $\overline{B\grave{B}}, \overline{A\grave{A}}$ نعين (Y)
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB} \,//\, (X)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{\grave{A}\grave{B}} = (X) \cap (Y)$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{\grave{A}\grave{B}} \,//\, \overline{AB}$ (إذا وازى مستقيم مستويا معلوما فإنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{\grave{A}\grave{B}} \perp \overline{B\grave{B}}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

كذلك $\overline{B\grave{B}} \perp \overline{AB}$ (في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لأن $m \sphericalangle ABC = 90°$ معطى)

$\Leftarrow \overline{AB} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

مثال (5) : ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث (ABC) والمستوي (X) قياسها $60°$ فإذا كان $BC = 10\ cm$ ، $AB = AC = 13\ cm$ جد مسقط المثلث (ABC) على (X) ثم جد مساحة مسقط $\Delta\, ABC$ على (X) .

المعطيات : $\Delta\, ABC\, ,\, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $ABC - \overleftrightarrow{BC} - (X) = 60°$

$AB = AC = 13\ cm$ ، $BC = 10\ cm$

المطلوب اثباته :

ايجاد مسقط $\Delta\, ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\Delta\, ABC$ على (X) .

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore$ { $\overline{CD}$ مسقط $\overline{CD}$ ، $\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X) } (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم وهو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\Delta\, BCD$ مسقط $\Delta\, ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

$\because AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5\ cm$ (العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \sphericalangle DEA$ عائدة للزاوية للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\Delta\ AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$$

في $\Delta\ AED$ القائم في D :

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

BCD مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\ cm^2$ و . هـ . م

ملاحظة : لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن ايجاده كالاتي :

$\cos 60° \times ABC$ مساحة $= BCD$ مساحة

$= \frac{1}{2} \times \left(12 \times 10 \times \frac{1}{2}\right) = 30\ cm^2$ و . هـ . م

ملاحظة : كل سؤال يعطي فيه زاوية زوجية علينا اتباع الآتي :

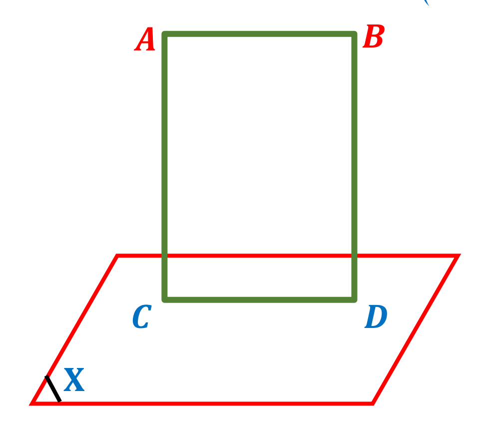
١) معرفة مستقيم تقاطع المستويين الذي هو حرف الزاوية الزوجية .

٢) نرسم عمود على حرف الزاوية الزوجية والعمود الاخر نستنتجه من مبرهنة الاعمدة الثلاث

تمارين $(2 - 6)$

س1/ برهن ان طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .

(وزاري ٢٠١١/د١ / ٢٠١٤/د١ / ٢٠١٦/د١ ٢٠١٨/د١)



المعطيات : $(X) // \overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

المطلوب اثباته :

أولا : $\overline{AB} // \overline{CD}$

ثانيا : $AB = CD$

البرهان :

$\because \overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (معطى)

$\therefore \overline{BD}, \overline{AC}$ عمودان على (X) (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

∴ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين AC , BD نعين (Y) (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستو وحيد يحتويهما)

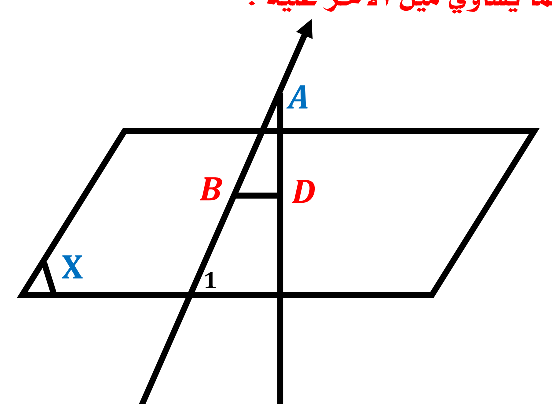
∵ $\overline{AB} \parallel (X)$ (معطى)

∴ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ (مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر) و . هـ . م (١)

∴ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع (لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين)

∴ $AB = CD$ خواص متوازي الاضلاع (كل ضلعين متقابلين فيه متساويين بالطول) و . هـ . م (٢)

س2/ برهن انه اذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فإنه ميله على أحدهما يساوي ميل الاخر عليه .



المعطيات : $(X) \parallel (Y)$, $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{B\}$

$\overleftrightarrow{AC} \cap (Y) = \{C\}$

المطلوب اثباته : ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو من نقطة معلومة)

∵ $(X) \parallel (Y)$ (معطى)

∴ $\overline{AD} \perp (Y)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

∴ $\overline{BD}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)
وكذلك $\overline{CE}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

∴ $\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)
$\measuredangle 2$ هي زاوي ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)
(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على ذلك المستوي)

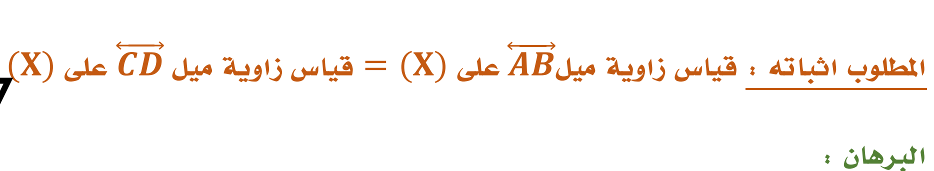
$\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ (خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيان)

∴ $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستوييهما)

∴ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

س3/ برهن على ان المستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه . (وزاري ٢٠١١ / د٣) (وزاري ٢٠١٣ / د٣)

المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ وكل منهما مائل على (X)



المطلوب اثباته : قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

البرهان :

ليكن $\left\{ \begin{array}{l} E \text{ في } \overleftrightarrow{AE} \perp (X) \\ F \text{ في } \overleftrightarrow{CF} \perp (X) \end{array} \right.$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{BE}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\therefore$ $\overline{DF}$ مسقط $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\therefore$ $\sphericalangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\sphericalangle 2$ هي زاوي ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي المعلوم)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AE} \,//\, \overleftrightarrow{CF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان)

$m\sphericalangle 3 = m\sphericalangle 4$ (اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستوييهما)

$\therefore m\sphericalangle 5 = m\sphericalangle 6 = 90°$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي)

$\therefore m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$ (مجموع قياسات زوايا المثلث = $180°$)

$\therefore$ قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

س4/ برهن على انه اذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فإن أطولهما زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الاخر عليه .

المعطيات : $AB > AC$ ، $A \notin (X)$

المطلوب اثباته : زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) < من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

البرهان : ليكن $\overline{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ من نقطة لا تنتمي اليه)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DB}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)
$\therefore$ $\overleftrightarrow{DC}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\therefore$ $\measuredangle\theta_1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)
$\therefore$ $\measuredangle\theta_2$ هي زاوي ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)
(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي المعلوم)

$\because$ $AB > AC$ (معطى)

$\because$ $\frac{1}{AC} > \frac{1}{AB}$ (خواص التراجح)

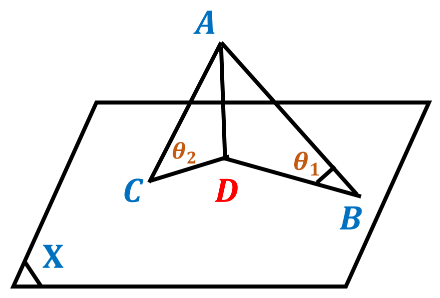
وبضرب طرفي المتراجحة بـ AD ينتج :

$\sin\theta_2 > \sin\theta_1$ (برفع الطرفين لأن دالة sin دالة متزايدة)

$\therefore$ $\theta_2 > \theta_1$

$\therefore$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) $>$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

س5 / برهن على انه اذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فإصغرهما ميلاً هو الاطول .



المعطيات : $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ مائلان على (X)

زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X) $>$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

المطلوب اثباته : $AB > AC$

البرهان : ليكن (X) $\perp$ $\overline{AD}$ (يمكن رسم مستقيم عمودي على مستوٍ من نقطة لا تنتمي اليه)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DB}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)
وكذلك $\overleftrightarrow{DC}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\therefore$ $\measuredangle\theta_1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)
$\therefore$ $\measuredangle\theta_2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)
(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي المعلوم)

$m\measuredangle\theta_2 > m\measuredangle\theta_1$ وبأخذ دالة الـ (sin) للطرفين :

$\frac{AD}{AC} > \frac{AD}{AB}$ (وبقسمة طرفي المتراجحة على AD)

$\frac{1}{AC} < \frac{1}{AB}$ وبقلب التراجع ينتج :

$AB < AC$ (خواص التراجع)

س6/ برهن ان زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على ميتو اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي . (وزاري ٢٠١٢ / د٣)

المعطيات : $\overline{AB}$ مائل على (X) ، $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{BD} \subset (X)$ ، $\sphericalangle ABC$ محددة بـ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ، $\sphericalangle ABD$ محددة بـ $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$

المطلوب اثباته : $m\sphericalangle ABC < m\sphericalangle ABD$

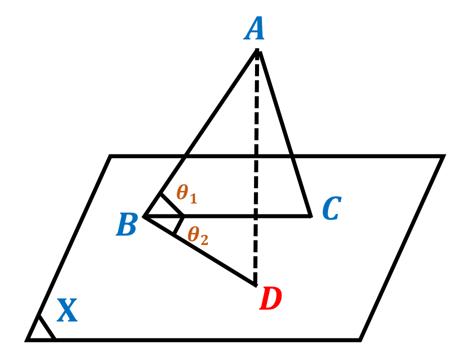
البرهان :

نرسم $\overline{AC} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

ونرسم $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

لتكن $\sphericalangle ABC = \theta_1$ ، $\sphericalangle ABD = \theta_2$

$AC < AD$ (العمود النازل من نقطة على مستوي هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة والمستوي)



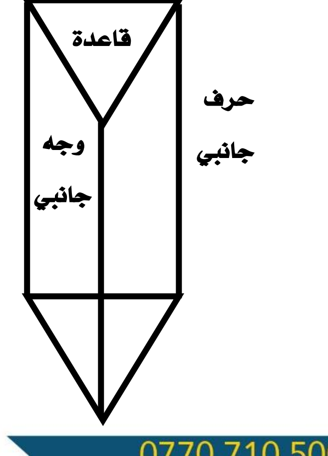
$\frac{AD}{AB} < \frac{AC}{AB}$ (خواص التراجع)

$\sin\theta_1 = \sin\theta_2$

$\theta_1 < \theta_2$

$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABD$

المجسمات



١- الموشور القائم :



الخواص :

١) احرفه الجانبية متوازية ومتساوية في الطول .

٢) كل وجه جانبي هو مستطيل .

٣) القاعدتين متوازيتين ومتطابقتين .

٢- متوازي المستطيلات : هو موشور قائم قاعدته مستطيلة

٣- المكعب : هو متوازي مستطيلات قاعدته مربعة

٤- الاسطوانة الدائرية القائمة : هي موشور قاعدته دائرة

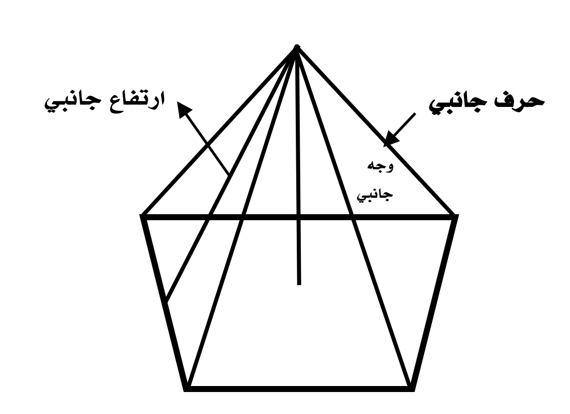
الحجم والمساحة بالنسبة للموشور والاسطوانة

١. الحجم (دائما) = مساحة القاعدة × الارتفاع

٢. المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

٣. المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

٥- الهرم المنتظم :



الخواص :

١) احرفه الجانبية متساوية .

٢) كل وجه جانبي مثلث متساوي الساقين .

٣) كل وجه جانبي له ارتفاع يسمى الارتفاع الجانبي .

٤) ارتفاع الهرم هو العمود النازل من الرأس على القاعدة .



ذو الوجوه الاربعة المنتظم : هو هرم ثلاثي منتظم

الخواص :



١) له اربعة أوجه كل وجه مثلث متساوي الساقين .

٢) له ستة أحرف جانبية متساوية بالطول .

٣) له اربع ارتفاعات متساوية بالطول .

a b c

ويكتب بالصيغ الاربع :

$n - abc$

$a - nbc$

$c - abn$

$b - can$

٦- المخروط الدائري القائم

الخواص : اذا قطع المخروط بمستوٍ يمر من رأسه وقاطعا قاعدته فإن المقطع هو مثلث متساوي الساقين .

الحجوم والمساحات بالنسبة الى الهرم أو المخروط

١- الحجم : $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

٢- المساحة الجانبية : $L.A = \pi r L$

٣- المساحة الكلية : $T.A = \pi\, r\, L + \pi\, r^2$

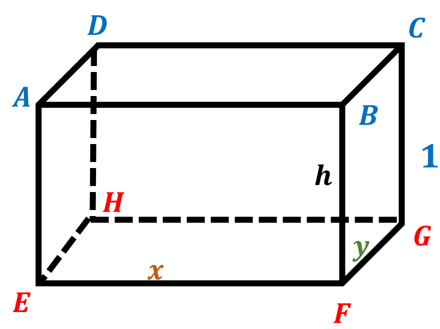
٧- الكرة

١) الحجم : $v = \frac{4}{3} r^3 \pi$

٢) المساحة : $A = 4 r^2 \pi$

تمارين (3 – 6)

س1/ اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = $724cm^2$ ومساحة قاعدته = $132cm^2$ ومساحة أحد أوجهه الجانبية = $110cm^2$ جد أبعاده وحجمه .



المعطيات : ABCD – EFGH متوازي المستطيلات

مساحته الكلية = $724cm^2$ ومساحة الوجه الجانبي $CBFG = 110cm^2$

ومساحة القاعدة $EFGH = 132\ cm^2$

المطلوب اثباته :

١- ايجاد ابعاد متوازي المستطيلات ABCD – EFGH

٢- ايجاد حجم متوازي المستطيلات ABCD – EFGH

البرهان : لتكن L. A = المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات

T. A = المساحة الكلية له

وليكن x = طول قاعدة متوازي المستطيلات y = عرض قاعدته h = ارتفاعه v = حجمه

$$L.A = 724 - [2(132)] = 724 - 264 = 460\ cm^2$$

∴ مساحة الوجهين المتقابلين $(\overline{BE}), (\overline{CH}) = 460 - 2(110) = 240\ cm^2$

∴ مساحة الوجه $(\overline{BE}) = 120\ cm^2$

$$x\,y = 132 \Rightarrow y = \frac{132}{x} \dots\dots (1)$$

$$x\,h = 120 \Rightarrow h = \frac{120}{x} \dots\dots (2)$$

$$y\,h = 110 \Rightarrow y = \frac{132}{x} . \frac{120}{x} = 110 \Rightarrow 110x^2 = (132)(120)$$

$$x^2 = \frac{(130)(120)}{110} = 144$$

$$\therefore x = 12\ cm\ ,\quad y = 11\ cm\ ,\quad h = 10\ cm$$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = (12).(11).(10) = 1320\ cm^2$$

س2/ اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi\ cm^2$ وحجمها $2000\ \pi\ cm^3$ أوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها . (وزاري ٢٠١٤ / د٢) (وزاري ٢٠١٥ / د٢)

المعطيات : اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $= 400\pi\ cm^2$ ، وحجمها = $2000\ \pi\ cm^3$

المطلوب اثباته :

١- ايجاد نصف قطر الاسطوانة الدائرية القائمة .

٢- ايجاد ارتفاع الاسطوانة الدائرتي القائمة .

البرهان :

ليكن طول نصف قطر الاسطوانة الدائرية القائمة $= r$ ، ارتفاعها $= h$ ، وحجمها $= v$

ومساحتها الجانبية $= L\,.\,A$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$L\,.\,A = 2r\,\pi\,h$$

$$400\pi = 2r\,\pi\,h \overset{(\div 2\pi)}{\Longrightarrow} r\,h = 200\ \ldots\ldots(1)$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $v = \pi r^2 h$

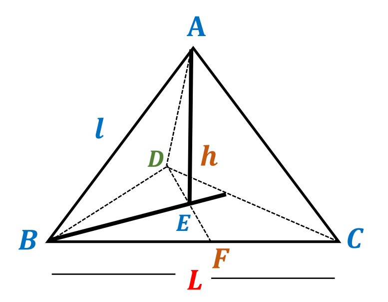
$$2000\pi = r^2\pi\,h \overset{(\div\pi)}{\Longrightarrow} r^2\ h = 2000\ \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{r^2\ h}{r\ h} = \frac{2000}{200} \Longrightarrow r = 10\ cm$$

وبتعويض قيمة r في معادلة (١) ينتج :

$$r\ h = 200 \Longrightarrow 10\ h = 200 \Longrightarrow r = 20\ cm$$

س3 / برهن على ان حجم ذو الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه $l =$ هو $\frac{\sqrt{2}l^3}{12}$ وحدة مكعبة .



المعطيات : $A - DBC$ ذو الوجوه الاربعة المنتظم وطول حرفه l

المطلوب اثباته : $v = \frac{\sqrt{2}\,l^3}{12}$

البرهان :

ذو الوجوه الاربعة المنتظم هو هرم ثلاثي قائم منتظم اوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة .

$\therefore$ القاعدة BCD مثلث متساوي الاضلاع

نرسم الاعمدة المنصفة من رؤوس $\Delta\, BCD$ على القاعدة فينصفها (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الاضلاع $= 60°$

$\therefore \; m\sphericalangle EBF = 30°$

ليكن ارتفاع ذو الوجوه الاربعة المنتظم $= AE = h$

$\Delta\, BEF$ قائم الزاوية في $F \Leftarrow \cos 30 = \frac{BF}{BE}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}l}{BE} \Longrightarrow BE = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$\Delta\, AEB$ قائم الزاوية في E (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

فيثاغورس $\quad l^2 = h^2 + \frac{l^2}{3} \Longrightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} \Longrightarrow h^2 = \frac{2}{3}\,l^2 \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,l$

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\therefore v = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2\right) h = \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}\,l^2\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,l = \frac{\sqrt{2}}{12}\,l^3$$

ملاحظة : مساحة قاعدة الهرم = مساحة مثلث متساوي الاضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2$ حيث (l) طول الحرف للهرم .

س4 / مخروط دائري قائم مر برأسه مستو فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار $8\ cm$ فإذا كانت مساحة القطع $= 102\ cm^2$ وارتفاعه $= 15\ cm$ (وزاري ٢٠١٥ / د١)

احسب (١) حجمه (٢) مساحته الجانبية (٣) مساحته الكلية

المعطيات : مخروط دائري قائم مر برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة $8\ cm$ فاذا كانت مساحة المقطع $= 102\ cm^2$ وارتفاع المخروط $= 15\ cm$

المطلوب اثباته :

(١) حساب حجم المخروط

(٢) حساب مساحته الجانبية

(٣) حساب مساحته الكلية

البرهان :

ليكن $y = BD$ ويمثل طول نصف قطر قاعدة المخروط ، $h = AD$ ويمثل الارتفاع ، v يمثل الحجم ،

$L.A =$ المساحة الجانبية ، $L = AB$ ويمثل الارتفاع الجانبي ، $T.A =$ المساحة الكلية .

في المثلث ADE القائم الزاوية في D (المستقيم العمودي على مستوى يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي) .

$$(AE)^2 = (AD)^2 + (ED)^2$$
$$(AE)^2 = (15)^2 + (8)^2 = 289$$
$$\therefore AE = 17\ cm$$

$\because$ AD عمودي على مستوى القاعدة ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ (لأنه بعد بين نقطة ومستقيم)

$\overline{AE} \perp \overline{BC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

مساحة المثلث ABC = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

$$A = \frac{1}{2} \times CB \times AE \Longrightarrow A = \frac{1}{2} \times CB \times 17 = 102$$

ولكن $BE = EC$ (العمود النازل من مركز دائرة على وتر فيها ينصفه)

في المثلث DEB القائم الزاوية في E :

$$(BD)^2 = (BE)^2 + (ED)^2$$
$$(BD)^2 = 36 + 64 = 100 \Longrightarrow BD = r = 10\ cm$$

في المثلث ADB القائم الزاوية في D :

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$
$$(AB)^2 = 225 + 100 = 325 \Longrightarrow AB = 5\sqrt{13}\ cm$$

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

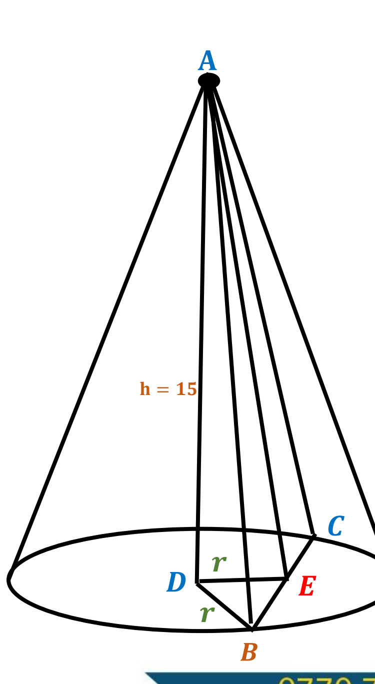
$$v = \frac{1}{3}(10)^2\pi(15) = 500\pi\ cm^3$$

المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع

$$L.A = \frac{1}{2}(2)(10)\pi\left(5\sqrt{13}\right) = 50\sqrt{13}\ \pi\ cm^2$$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$T.A = 50\sqrt{13}\pi + (10)^2\pi = 50\pi\left(\sqrt{13} + 2\right)\ cm^2$$



س5/ اذا علمت أن يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم برهن أن نصف قطر الكرة = $\frac{3}{4}$ الارتفاع .

المعطيات :

رسمت الكرة التي مركزها C خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم $D - EFG$

المطلوب اثباته : $r = \frac{3}{4}h$

البرهان :

ذو الوجوه الاربعة المنتظم هو هرم ثلاثي قائم منتظم ، أوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة .

لتكن مساحة القاعدة $A = EFG$ وارتفاع الهرم $h = DB$ وحجمه $v =$ وطول نصف قطر الكرة $= r = DC$.

مركز الكرة C قسم الهرم الكبير $D - EFG$ الى اربعة أهرامات متساوية بالحجم لتساوي القاعدة والارتفاع وهي :

$C - DEF$ و $C - GDE$ و $C - FGD$ و $C - EFG$ وارتفاعها كل منها $(h - r)$

∴ حجم ذي الوجوه الاربعة $= 4\times$ حجم الهرم $C - EFG$

$$v = 4 \times V_{C-EFG}$$

$$\frac{1}{3}Ah = 4\left(\frac{1}{3}A\right).(h - r)$$

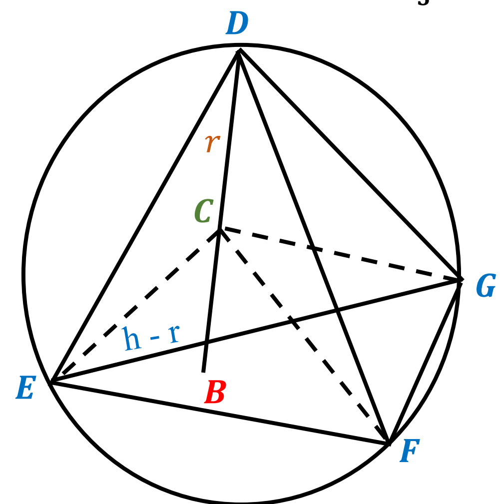
وبالقسمة على $\frac{1}{3}A$ نحصل على :

$$h = 4(h - r)$$

$$h = 4h - 4r$$

$$4r = 4h - h$$

$$4r = 3h \Rightarrow \quad r = \frac{3}{4}h$$



تم بحمد الله